Departament de Didàctica de la Matemàtica

Universitat de València Estudi General

DEL ÁLGEBRA A LA GEOMETRÍA

LA SISTEMATIZACIÓN DE LAS COORDENADAS CARTESIANAS Y LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES EN LA *INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM* DE EULER Y EN EL *TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL* Y EN EL *TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE, ET D'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE* DE LACROIX.

Memoria del "Trabajo de Investigación" del Programa del Doctorado de

Didáctica de la Matemática de la Universitat de València

Presentado por

Maite Navarro Moncho

Valencia, 2012

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Universitat de València

DEL ÁLGEBRA A LA GEOMETRÍA

LA SISTEMATIZACIÓN DE LAS COORDENADAS CARTESIANAS Y LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES EN LA *INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM* DE EULER Y EN EL *TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL* Y EN EL *TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE, ET D'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE* DE LACROIX.

Memoria presentada por Maite Navarro Moncho para superar los créditos de investigación del programa de Doctorado del Departament de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat de València

Vº.Bº. El Director

Fdo. Luis Puig Espinosa

Fdo. Maite Navarro Moncho

Valencia, 2012

Quiero expresar mi profunda gratitud al Dr. Luis Puig, por haber aceptado dirigir este trabajo, por su dedicación y paciencia, y por haberme ilusionado tanto en esta investigación.

ÍNDICE

0. INTRODUCCIÓN.

Lo que presentamos aquí es un estudio exploratorio en el que pretendemos examinar de qué manera se realiza la representación gráfica de funciones en algunos textos históricos correspondientes al momento en que la forma actual de representar las funciones en el plano cartesiano se está constituyendo, y al momento en que se incorpora como materia que hay que enseñar en los libros dedicados a la enseñanza de las matemáticas.

La aplicación del álgebra a la geometría y la constitución de la geometría analítica es un momento fundamental, cuyos protagonistas principales son Descartes y Fermat, pero también lo es la elaboración del concepto de función y el comienzo del cálculo infinitesimal.

En el libro de Euler *Introductio in Analysin Infinitorum*[1] (1748) nos encontramos desarrollado un concepto de función como expresión analítica, y una clasificación de esas funciones, que se refleja en una clasificación de las curvas, clasificación hecha considerando si la curva está expresada mediante una o más expresiones analíticas, y por el tipo de función. La clasificación de las curvas a partir de las funciones que las expresan es posible gracias a una justificación precisa de la representación de esas funciones como curvas. Euler justifica que esa representación puede hacerse gracias a que la naturaleza de las cantidades variables y la de la recta, en el aspecto pertinente para la relación funcional, es la misma: tanto una cantidad variable como una recta son magnitudes.

En este texto examinamos cómo Euler organiza la representación de funciones trazando únicamente un eje, el de abscisas, sobre el que levanta lo que él llama las “aplicadas”, comparando esa representación con la representación actual mediante los dos ejes de coordenadas. Examinamos también algunos conceptos eulerianos relacionados con la representación gráfica de funciones, en particular los de abscisa, aplicada, función, curva continua, curva discontinua y ecuación general de una curva determinada (en concreto, ecuación general de la recta).

Lacroix (1765-1843) es reconocido, tanto por los historiadores de las matemáticas como por los historiadores de la educación matemática o los didactas de las matemáticas (Boyer, 2007, Schubring, 1992), como un gran autor de libros de texto. Libros de texto elementales (livres élémentaires) que están inspirados en la obra de otros matemáticos y

[1] A partir de este momento nos referiremos a la *Introductio in Analysin Infinitorum* como la *Introductio*.

en su propio tratado de cálculo diferencial e integral (*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*), en los que el principal objetivo es la reestructuración, organización y "elementarización" de las matemáticas con un fin escolar, desde la educación secundaria hasta la educación superior.

El *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*[2] es el primer tratado general sobre teoría y aplicaciones de cálculo infinitesimal desde la *Introductio*; en el que se estructuran y se "elementarizan" los resultados originales de numerosos investigadores (Euler, Lagrange, Laplace, Monge, Cauchy…) que se hallan dispersos en múltiples publicaciones de las academias repartidas por toda Europa.

En el primer volumen del *Traité du calcul,* dedicado al cálculo diferencial, analizaremos las nociones generales sobre funciones y sobre su representación gráfica en el plano mediante un sistema de coordenadas, generalmente ortogonal, en el que ya se utilizan los dos ejes de coordenadas, el de abscisas y el de ordenadas.

La misma sistematización de coordenadas del primer volumen del *Traité du calcul* (1797) se expone de manera más detallada y más "elementarizada" en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'application de l'Algèbre a la Géométrie*[3] (1798).

Del *Traité Élémentaire de Trigonométrie* examinaremos cómo se organiza el proceso de enseñanza-aprendizaje del uso de las coordenadas cartesianas con el objetivo de asociar a cada lugar geométrico su ecuación y su gráfica. En particular, examinaremos en detalle la ecuación general de la recta en el plano.

A partir del *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* Lacroix publicó el *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral*[4], que tuvo gran difusión internacional.

Hemos estructurado la memoria de este trabajo de investigación en ocho capítulos y trece anexos.

En el primero capítulo exponemos la naturaleza y objeto de la investigación.

---

[2] A partir de este momento nos referiremos al *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* como *Traité du calcul*.

[3] A partir de este momento nos referiremos al *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'application de l'Algèbre a la Géométrie* como *Traité Élémentaire de Trigonométrie.*

[4] A partir de este momento nos referiremos al *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral* como *Traité élémentaire du calcul*.

En el segundo, realizamos un breve recorrido por el concepto de función destacando algunas de las definiciones más relevantes desde la Antigüedad hasta la definición en 1971 de Godement por ser la más frecuente en los libros de texto.

Los capítulos del tercero al sexto conforman la parte esencial de esta memoria.

El tercero está dedicado al proceso de sistematización de las coordenadas iniciada por Euler y consolidada con el establecimiento de ejes de coordenadas absolutos en la obra de Lacroix.

El capítulo cuarto contiene las cuestiones que atañen al trazado de curvas en la *Introductio* y en los tratados de Lacroix, basado en las diferencias y similitudes en los textos de Euler y Lacroix.

En el quinto presentamos un análisis descriptivo y comparativo de la obtención de las ecuaciones de cambio de coordenadas en cada uno de los tratados que hemos seleccionado.

El sexto contiene el examen detallado de un caso, el estudio de la recta, cuya ecuación obtienen de manera muy diferente y de la que realizan un estudio dispar en cuanto a la profundidad, extensión y sistematización. Mientras Euler prácticamente se limita a dar la ecuación, Lacroix realiza un estudio minucioso y muy detallado de la recta que incluye, además de la obtención de la ecuación general de la recta, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad, la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, distancias (entre dos puntos y de un punto a una recta), intersección de rectas y ángulo entre dos rectas.

En el séptimo presentamos algunas consideraciones finales.

El anexo I contiene el índice del *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de Lacroix.

En el anexo II, presentamos algunas de las múltiples ediciones de algunas de la obras de Lacoix a las que hemos tenido acceso.

El anexo III, Precursores de la geometría analítica, es el más extenso y contiene una breve historia gráfica sobre algunos aspectos que permitieron establecer la geometría analítica como una disciplina diferenciada dentro de las matemáticas en el momento en el que se incorporó como materia en los libros de texto destinados a la enseñanza, tanto secundaria como superior, tras la Revolución Francesa.

El anexo IV contiene las tablas cronológicas de la geometría analítica de George Glaeser que hemos utilizado en el anexo III.

El anexo V, una tabla del tipo de coordenadas utilizadas en el cálculo en la Europa del siglo XVIII basada en la tesis de Mónica Blanco.

El anexo VI está dedicado a la clasificación de las funciones que realiza Euler en la *Introductio in Analysin Infinitorum*.

En el anexo VII hemos analizado algunos de los aspectos del método cartesiano en los *Élémens d'Algebre* de Euler

El anexo VIII contiene la clasificación de Lacroix en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'application de l'Algèbre a la Géométrie* de la ecuación de 2º grado completa en cuatro tipos y su construcción geométrica de las soluciones.

En el anexo IX hemos realizado una selección de textos de los *Elementos de álgebra* de Lacroix en los que aborda diversas cuestiones relativas a las cantidades negativas.

En el X, algunos aspectos del método cartesiano en la obra de Lacroix, a partir del análisis de la resolución de uno de los problema del *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'application de l'Algèbre a la Géométrie*.

Los tres anexos restantes son archivos de GeoGebra en los que se presentan algunas de las curvas que han aparecido a lo largo de este estudio. En concreto, el anexo XI contiene la curva de Agnesi; el anexo XII las cuatro formas canónicas de la líneas de tercer orden de Newton y; el anexo XIII, una de las funciones en las que Lacroix explica cómo se representa una función mediante coordenadas cartesianas.

Aspectos parciales de este trabajo hemos dado cuenta en las *IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana* y en la *IX Jornada sobre la història de la Ciència i l'Ensenyament de la Societat Catalana d'Historia de la Ciència i de la Tècnica* (en prensa).

1. NATURALEZA Y OBJETO DEL TRABAJO.

1.1. NATURALEZA

El concepto de función es un concepto central en la matemática actual, la representación gráfica de funciones mediante coordenadas es la forma más habitual de representar funciones en la etapa de la educación secundaria. Las dificultades en el concepto de función que algunos estudiantes tienen en esta etapa nos han conducido a indagar en la historia uno de los aspectos que conforman este concepto: la representación de funciones mediante coordenadas cartesianas en el plano.

Este es un trabajo de historia hecho desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas en el mismo sentido en que Puig (2011b, p. 29) lo hace respecto de los problemas de la enseñanza y aprendizaje del álgebra: "¿Qué queremos decir con "estudiar la historia de las matemáticas desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas"? En primer lugar, queremos decir que los problemas de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra es lo que determina para nosotros qué textos debemos buscar en la historia y qué preguntas deberíamos plantearles."

Nuestro interés no se centra en analizar cómo se constituye la sistematización de las coordenadas, el concepto de función y su representación en el plano cartesiano en la historia de las matemáticas, sino en el momento en que se incorpora como materia que hay que incluir en los libros dedicados a la enseñanza de las matemáticas y cómo se organiza dicha enseñanza.

¿Por qué hemos elegido la *Introductio* de Euler y el *Traité du calcul*, el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* y el *Traité Élémentaire du calcul* de Lacroix?

1.1.1. Razones generales para la selección de los textos.

Los motivos que nos han llevado a realizar la elección de estas obras son diversos.

Entre los motivos generales, que comparten los cuatro textos escogidos, recogemos algunas de las conclusiones a las que han llegado diversos investigadores en didáctica de las matemáticas de las universidades españolas. Todos ellos hacen, en sus diferentes artículos, referencia directa o indirecta al artículo de Schubring (1987) "On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author", publicado en *For the learning of mathematics.*

Desde el punto de vista histórico-epistemológico, en la SEIEM de 2009 podemos encontrar en el seminario sobre análisis de libros de texto las reflexiones de varios investigadores españoles (Sierra, Maz, Gómez, Ortega, Monterrubio) que están utilizando la historia para indagar sobre los "obstáculos" en el aprendizaje de las matemáticas.

En la introducción del seminario sobre análisis de libros de texto Modesto Sierra afirma: "A mi juicio, un punto de inflexión se produce con el artículo de Schubring (1987)". Del que destaca "En este artículo, Schubring parte de la idea de que los manuales escolares determinan más la enseñanza que los decretos ministeriales y desarrolla una metodología precisa para analizar libros de textos históricos, particularizando para el caso de Lacroix."

En Sierra, González y López (1998) aparecen diferentes usos de la historia de las matemáticas. "La historia de la Matemática puede utilizarse en la enseñanza para ilustrar la presentación de un concepto motivando el aprendizaje de los alumnos, pero hay otra manera de utilizar esta historia. Esta otra manera trata de encontrar en la historia los sucesivos estados de la evolución de un concepto, los problemas que surgieron, los errores que cometieron los matemáticos, los «obstáculos» que hubo que superar. Este conocimiento puede ser útil para tratar de diseñar secuencias didácticas, empeño que persiguen en la actualidad algunos grupos de investigadores, pero también para comprender los procesos de pensamiento de los estudiantes en la adquisición de un concepto determinado."

Esta manera de utilizar la historia de las matemáticas la encontramos en Gómez (2011): utiliza el análisis de manuales y libros de texto para identificar un problema actual de enseñanza y aprendizaje, la ambigüedad del signo radical. Porque el verdadero problema y más importante en la Educación Matemática es buscar respuestas a la pregunta formulada por Freudenthal (1981): ¿por qué hay tantos niños que no aprenden las matemáticas como deberían?

"Para intentar responder a esta cuestión, gran parte del esfuerzo de los investigadores de las últimas décadas se ha orientado a facetas del paradigma cognitivo centradas en la observación de procesos de aprendizaje, siendo el proceso de aprendizaje de la humanidad el mayor de estos (Freudenthal, 1981, p.137). Observar el proceso de aprendizaje de la humanidad requiere dirigir la atención a la historia de las ideas matemáticas, a través del único registro disponible de las mismas. Esto es, a través de textos y manuales escolares y mediante un análisis de los mismos.” (Gómez, 2011, p. 50)

Esta idea ya aparece en Gómez (2008, p. 2), “cuando se trabaja en Educación Matemática, los libros de texto son documentos imprescindibles para indagar acerca de lo que es o ha sido la práctica real de la enseñanza, ya que los libros de texto son los registros disponibles del conocimiento matemático que la institución escolar ha transmitido, en un momento determinado de la historia.

Parafraseando a Schubring, (1987, p. 41), si se quiere indagar sobre esta práctica, hay que acudir al análisis de los viejos libros de texto, más que a los decretos y programas oficiales.

Esto se puede hacer siguiendo dos líneas principales: una es el análisis textual, para describir, evaluar o caracterizar un/el contenido matemático en su dimensión curricular y metodológica; y la otra es el análisis epistemológico, para conocer cómo se han concebido, configurado y establecido las matemáticas escolares, en diferentes momentos de la historia.”

En la misma línea Maz (2009) afirma: “es evidente que el análisis de textos escolares en cualquiera de los niveles educativos, arroja no sólo información sobre el contenido de los conocimientos, sino que también lo hace sobre aspectos pedagógicos, curriculares o sociales. Cuando se trabaja en Educación Matemática y se estudian libros de texto, hay que considerar que los textos que se estudian y analizan son fuentes primarias para conocer el estado del conocimiento científico y en qué medida estos conocimientos se incardinan en los planes de formación” (Maz & Rico, 2009, p. 5).

Esos aspectos pedagógicos, a los que se refieren Maz y Rico, así como la afirmación de que los libros de textos son fuentes para conocer el estado del conocimiento científico los podemos encontrar en el ensayo *The Structure of Scientific Revolutions* (*La estructura de las revoluciones científicas*), que en 1962 publicó Thomas Kuhn.

> Los libros de texto mismos tienen como meta el comunicar el vocabulario y la sintaxis de un lenguaje científico contemporáneo. (Kuhn, 1971, p. 213)
>
> Los libros de texto son vehículos pedagógicos para la perpetuación de la ciencia normal, siempre que cambien el lenguaje, la estructura de problemas o las normas de la ciencia normal, tienen, íntegramente o en parte, que volver a escribirse. En resumen, deben volverse a escribir inmediatamente después de cada revolución

> científica y, una vez escritos de nuevo, inevitablemente disimulan no sólo el papel desempeñado sino también la existencia misma de las revoluciones que los produjeron. . (Kuhn, 1970, p. 214)

Kuhn define ciencia normal de la siguiente manera:

> En este ensayo, 'ciencia normal' significa investigación basada firmemente en una o más realizaciones científicas pasadas, realizaciones que alguna comunidad científica particular reconoce, durante cierto tiempo, como fundamento para su práctica posterior. En la actualidad, esas realizaciones son relatadas, aunque raramente en su forma original, por los libros de texto científicos, tanto elementales como avanzados. (Kuhn, 1971, p. 33)

El sentido en el que pretendemos realizar esta investigación viene recogido en Puig (2006, p. 113). "Una de las maneras de examinar los textos de matemáticas de épocas pasadas, que considero que es propia de la didáctica de las matemáticas, es la que busca en ellos lo que podríamos llamar "cogniciones petrificadas". "Petrificadas" porque están ahí, en el texto que nos ha legado la historia, como en los monumentos de piedra de los que no cabe esperar que digan más que lo que ya está en ellos. "Cogniciones" porque lo que queremos leer en esos textos no es el despliegue de un saber, las matemáticas, sino el producto de las cogniciones (matemáticas) de quien se declara su autor".

Concretamente respecto el tema que pretendemos analizar, el uso de las coordenadas en la representación gráfica de funciones, Sierra (1997) afirma que "el concepto de función es un concepto central en la matemática de nuestro tiempo. Numerosas investigaciones (ver por ejemplo Harel y Dubinsky, 1992) han mostrado las dificultades de este concepto por los estudiantes de enseñanza secundaria. Una conclusión generalizada en estas investigaciones es más que presentar la definición formal de función que contiene elementos poco asequibles para el estudiante es preferible encontrar una definición que cumpla el papel dual de ser familiar a los estudiantes y provea las bases para un desarrollo matemático posterior". Y añade "Ligado al concepto de función aparece su representación gráfica. De acuerdo con los autores citados más arriba la representación gráfica más usual de una función es la gráfica cartesiana con la introducción de un sistema de coordenadas."

Es precisamente la sistematización de coordenadas en su aplicación en la representación gráfica de funciones lo que pretendemos explorar en el momento que se está formalizando e incluyendo en los manuales[5] dedicados a la enseñanza.

A pesar de que la *Introductio* sea un libro de autor, en la práctica fue utilizado como libro de texto. Según Kuhn (1971, p. 33) antes de que, a comienzos del siglo XIX, se popularizaran los libros de texto, muchos libros clásicos famosos desempeñaron una función similar. Kuhn cita como ejemplos La *Física* de Aristóteles, el *Almagesto* de Tolomeo, los *Principios* y la *óptica* de Newton, la *Electricidad* de Franklin, la *Química* de Lavoisier y la *Geología* de Lyell (y no cita ningún libro de matemáticas porque, en su teoría sobre las revoluciones científicas tal y como la desarrolla en este libro, las matemáticas no están sometidas a revoluciones, sino que su historia funciona con una lógica diferente)

> —estas y muchas otras obras sirvieron implícitamente, durante cierto tiempo, para definir los problemas y métodos legítimos de un campo de la investigación para generaciones sucesivas de científicos. Estaban en condiciones de hacerlo así, debido a que compartían dos características esenciales. Su logro carecía suficientemente de precedentes como para haber podido atraer a un grupo duradero de partidarios, alejándolos de los aspectos de competencia de la actividad científica. Simultáneamente, eran lo bastante incompletas para dejar muchos problemas para ser resueltos por el redelimitado grupo de científicos. (Kuhn, 1971, p. 33)

Si Kuhn hubiera incluido las matemáticas entre las ciencias cuya historia sigue la lógica de las revoluciones que él teoriza, sin lugar a dudas hubiera incluido los *Elementos* de Euclides, en la lista que hemos mencionado. Y también podría haber incluido la *Introductio*, que comparte estas dos características.

1.1.2. Razones particulares para la selección de los textos.

1.1.2.1. La *Introductio* de Euler:

1º.- La *Introductio* de Euler es un libro de autor que trata de manera general y sistemática el uso de coordenadas.

Desde la publicación en 1637 de *La Géométrie* de René Descartes y de *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* (*Introducción a los Lugares Planos y Sólidos*) de Pierre Fermat en

[5] Utilizamos este término en el sentido que aparece en Gómez (2008, p. 2): "En un sentido amplio, un manual es un libro de texto utilizado para la enseñanza y recomendado por los profesores. Es un libro reconocible por su estructura, por su sistema de comercialización específico y porque está rotulado claramente indicando la materia que trata, y generalmente a quién va dirigido."

1679 (aunque la obra estaba concluida en 1636) son muchos los científicos-matemáticos (Newton, L'Hôpital, Ditton, Reyneau, Maclaurin…) que utilizan diferentes tipos de coordenadas[6] en sus investigaciones, sobre todo en las investigaciones relacionadas con los problemas de la tangente y la cuadratura de curvas, es decir, en los problemas que originarán el cálculo diferencial e integral. El uso de coordenadas en los inicios del cálculo infinitesimal estaba extendido pero no sistematizado. Euler sistematiza las coordenadas en el segundo tomo de la *Introductio*, aunque no es la primera vez que las utiliza. En 1728 publicó en los *Commentarii*[7] de San Petersburgo algunos artículos sobre el uso de coordenadas en la geometría del espacio tridimensional.

> […] los trabajos de Euler sobre Geometría Analítica representan la consumación de las ideas de Fermat y Descartes en la aplicación de las ecuaciones del Álgebra a la resolución de problemas geométricos mediante sistemas de coordenadas.
>
> Euler explota los métodos analíticos introducidos por Fermat y Descartes y desarrollados por van Schooten, De Witt, Wallis, La Hire, L'Hôpital, ..., y bajo la idea de que "mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del cálculo algebraico", Euler da un gran paso de gigante en la sistematización de la Geometría Analítica plana y tridimensional. (González, 2007, p. 170)

Según Boyer (2007, p. 79) "Este libro (segundo tomo de la *Introductio*) hizo más que ningún otro por conseguir que el uso de las coordenadas, tanto en dimensión dos como en dimensión tres, se convirtiera en el instrumento básico para el estudio sistemático de curvas y superficies".

2º.- La sistematización de coordenadas se hace con el fin de estudiar las propiedades de las funciones.

En el primer volumen expone la teoría de funciones (analíticas), las funciones que se pueden desarrollar en serie de potencias, y para ello desarrolla la teoría de series infinitas y de otros procesos infinitos desde un punto de vista algebraico, aunque sin el rigor moderno. El estudio de las funciones por medio de procesos infinitos hace que, según Boyer (2007, 558), la *Introductio* se considere como la piedra angular de lo que desde entonces llamamos análisis. A partir de ese momento la idea de función se

---

[6] Se puede ver en Blanco (2004); también en el Anexo V en el que hemos hecho un breve recorrido gráfico del uso de coordenadas desde los antecedentes de la antigüedad hasta la época de Lacroix, basado en la tesis de Blanco.

[7] Los *Commentarii Academiae Scientiarum imperiales Petropolitanae* es la revista que se publicaba en la Academia de San Petesburgo en la que Euler desempeñaba las funciones de asesor científico del gobierno.

convirtió en la idea fundamental del análisis. Según Dunham (2000, p. 67), "Antes de Euler, el análisis trataba sobre las propiedades de las *curvas*; después de él, sobre las propiedades de las *funciones*".

En el prefacio de la *Introductio*, Euler hace un resumen bastante detallado del contenido de los dos libros que la forman.

> He dividido esta obra en dos libros, el primero de los cuales comprende las que atañen al mero análisis; en cuanto al segundo, he dado en él explicación de las cuestiones de geometría que es necesario conocer, ya que el análisis de infinitos también se suele enseñar de modo que se haga ver al mismo tiempo su aplicación a la geometría. […]. En el primer libro, por consiguiente, comoquiera que todo el análisis de infinitos verse sobre cantidades variables y sus funciones, he expuesto antes de nada la teoría de las funciones de punta a cabo; y demostrado así su transformación como resolución y desarrollo mediante series infinitas. […]. Igual disposición he usado en el segundo libro, donde trato cuanto suele referirse a la geometría superior. Antes de ocuparme de las secciones cónicas, empero, que en otros ocupa casi por entero este lugar, propongo una teoría de las líneas curvas en general, de tal suerte que pueda aplicarse a escrutar la naturaleza de una curva cualquiera. No acudo para ello a ningún otro auxilio fuera de la ecuación que expresa la naturaleza de una línea curva cualquiera; de la cual enseño a deducir así figura como propiedades primarias de toda curva: […] (Euler, 2000, pp. 4-6).

3º.- Recoge los resultados de otros matemáticos.

En el prefacio de la *Introductio* Euler reconoce que contiene resultados que otros ya han tratado y pide indulgencia por no mencionarlos en aras de la brevedad. A la vez que añade que en este libro se encuentran muchas cuestiones resueltas que alcanzan aquí soluciones a partir de otros principios.

4º. Goza del reconocimiento de sus contemporáneos.

Son muy conocidas las alabanzas hechas por Johann Bernoulli

> Yo represento el análisis superior como si estuviera en su infancia, pero tú lo estás llevando a su estado adulto. (Dunham, 2006, p. 31).

Y por Laplace:

> Leed a Euler, leed a Euler. Él es el maestro de todos nosotros. (Dunham, 2006, p. 21)

López (2007, p. 11) reproduce también el elogio fúnebre de Condorcet:

> Cualquiera que se dedicase a las matemáticas en el futuro sería guiado y sostenido por el genio de Euler del que todos los matemáticos son sus discípulos.

Al que añade la alabanza de André Weil, uno de los mejores matemáticos del siglo XX:

> Durante toda su vida… parece haber llevado en la cabeza la totalidad de las matemáticas de su época, tanto puras como aplicadas. (Dunham, 2006, p. 23)

5º. Goza del reconocimiento de los investigadores del siglo XX.

A comienzos del siglo XX Felix Klein impulsa un movimiento de reforma de la educación. Dicho movimiento propugna dar al concepto de función un lugar relevante en la enseñanza. En su libro *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Aritmética, Álgebra, Análisis* (Klein, 2006, p. 282) realiza una digresión sobre el concepto general de función en la que afirma que aunque autores como Leibniz y los Bernoulli emplearon el concepto de función en casos particulares como potencias, funciones trigonométricas y otras similares, el concepto de función no se formulará de un modo general hasta el siglo XVIII. Esta formulación empieza con Euler con dos explicaciones distintas de la palabra función: la primera define como función "a toda expresión analítica de x, es decir, a toda expresión compuesta de potencias, logaritmos, funciones trigonométricas y similares, pero sin indicar de forma precisa qué combinaciones resultan admisibles." Esta es la definición que aparece en el primer volumen de la *Introductio*. En la segunda, una función $y = f(x)$ queda definida para Euler "siempre que una curva cualquiera sea dibujada en un sistema de ejes coordenados x, y." En realidad, aunque Klein habla de los dos ejes coordenadas, Euler sólo utiliza un eje, el eje de abscisas, como veremos más adelante al analizar el trazado de curvas en el segundo volumen de la *Introductio*.

6º. Sus obras son fuente de elaboración de otros libros, en particular de los tratados de Lacroix.

1.1.2.2. Los tratados de Lacroix.

Lacroix fue profesor de matemáticas desde 1782 hasta 1843, dedicando pues más de sesenta años a su enseñanza, antes, durante y después de la Revolución Francesa, y abarcando todas las disciplinas de las matemáticas (aritmética, álgebra, geometría, probabilidad…) y todos los niveles escolares (salvo la educación primaria). Además de profesor fue un destacado autor de libros de texto, según Schubring (1992, p. 275) "se puede considerar a Lacroix como un autor cuya obra contribuyó más decisivamente a la constitución de las matemáticas escolares en Francia." Schubring (1992, p. 277) añade que "se puede resaltar como objetivo principal de Lacroix el desarrollo de un cuerpo coherente de matemáticas escolares, desde la secundaria hasta la educación superior."

1º.- Diferentes usos por parte Lacroix de las obras d'Euler.

Lacroix inicia su práctica docente utilizando algunas obras de Euler. Pero además, como ya hemos mencionado, utiliza la obra de Euler como fuente de elaboración de sus propios tratados.

En efecto, Lacroix comienza su larga etapa como docente a finales de 1782, como sucesor de Monge (su amigo y tutor), instruyendo a los futuros militares en L'École des Gardes de la Marine de Rochefort. En enero de 1786, recomendado por Monge[8], sustituye a Condorcet[9] en la cátedra de matemáticas del Lyceé de París. Lacroix ocupará la plaza entre enero de 1786 y agosto de 1787, fecha en la que se suprimió la cátedra.

Aunque no nos ha llegado el texto de las lecciones de Lacroix, conocemos, gracias al discurso inaugural a cargo de Condorcet el 13 de enero de 1786, el programa del curso. Condorcet divide las matemáticas en seis partes: Elementos de aritmética y álgebra; Elementos de geometría; Mecánica; Aplicación de la física matemática: óptica, acústica, fuerzas eléctricas…; métodos de observación, cálculo y predicción de los fenómenos celestes; e, intereses, tablas de mortalidad, cálculo de probabilidades.

El discurso finaliza anunciando que lo sustituirá Lacroix y elogiando su talento y su conocimiento en Matemáticas.

> Ce jeune géomètre, élève de M. Monge de l'Académie des Sciences, a montré dès sa plus grande jeunesse des talens et des connaissances en Mathématiques qui l'ont fait nommer professeur de mathématiques à Rochefort à l'âge de 17 ans. (Taton, 1959, p. 146)

Lacroix se propone seguir para las lecciones de Álgebra, *Élémens d'Algebre de Euler*[10]; y para la aplicación del cálculo a la física, *Lettres à une princesse d'Allemagne*; y dado

[8] Monge le propone a Lacroix la cátedra a finales de 1785. (Taton, 1959, pp.138-142)
[9] A penas 15 días antes del comienzo del curso Condorcet escribe a Lacroix informándole de algunos detalles referentes a las clases. (Taton, 1959, pp.142-143)
[10] Se trata de la traducción francesa de *Vollstàndige Anleitung zur Algebra* (2 vol., Saint-Pétersbourg, 1770-1771), d'Euler, traducción hecha por Jean III Bernoulli (1744-1807) y publicada con las notas de Lagrange. *Éléments d'algèbre* par M. Léonard Euler, traduits de l'allemand avec des noies et des additions, 2 vol. in-8°, Lyon, Bruyset et Paris, Vve Desaint, 1774.

que esta excelente obra no puede cubrir totalmente esta meta, Condorcet y Lacroix comienzan el proyecto de hacer una nueva edición con un volumen de adiciones.

> La manière dont il remplit les mêmes fonctions au Lycée a justifié le choix qu'on a fait de lui et les éloges de M. de Condorcet. Il se propose de suivre pour les leçons d'Algèbre les élémens qu'en a donnés Euler, et pour l'application du calcul aux questions de Physique, les leçons que le même savant en a données dans ses *Lettres à une princesse d'Allemagne*; mais comme cet excellent ouvrage ne pourroit remplir entièrement cet objet, M. de Condorcet et M. de La Croix ont pris le parti de faire une nouvelle édition, avec un volume entier d'additions. (Taton, 1959, p. 146)

Como autor de libros de texto queremos destacar el *Traité du cálcul*, en cuyo índice[11] detalla en cada capítulo las obras que ha utilizado. En el capítulo que centra nuestro interés, dedicado a la teoría general de curvas, aparece como fuente la *Introductio*.

2º El *Traité du calcul* recoge los resultados originales de numerosos investigadores.

El *Traité du calcul* fue el primer tratado general sobre cálculo infinitesimal desde la *Introductio*. Además de los resultados originales de Euler, recoge los de investigadores como Lagrange, Laplace, Monge, Cauchy,…, organizados de tal manera que estructuran los elementos del cálculo diferencial e integral con un doble propósito, por una parte recoger en un solo tratado todo lo que se utilizaba en la época sobre el cálculo, y por otra facilitar el proceso de enseñanza del cálculo. Según Schubring (1992, p.278) "En este libro de texto no solamente intentaba reunir los resultados originales de los varios investigadores, dispersos en las publicaciones de la multitud de academias europeas, sino también *estructurarlos* y *elementalizarlos*; i.e. analizar los *elementos* del cálculo, considerado como un campo conceptual[12], y presentarlos en una secuencia ordenada y bien definida empezando con estos elementos básicos."

Según Schubring (1992, p. 278) en una carta del 9 de noviembre de 1789 a Legendre, en la que solicita material de investigación sobre el cálculo necesario para su libro, Lacroix discute este objetivo:

> Aun los libros de texto elementales más completos –el Cálculo Integral de Euler, y el de Cousin- necesita adiciones, y para incrementar la coherencia de sus partes tal vez se tenga que cambiar la manera de su presentación.

[11] Se puede ver en el anexo I.
[12] Schubring alude a la noción de campo conceptual de Vergnaud (1981).

Lacroix dedicó más de diez años a la elaboración de este tratado. Durante su estancia, en París entre enero de 1787 y octubre de 1788, entró en contacto con varios investigadores con los que mantendrá correspondencia desde Besançon. Lacroix tuvo que aceptar, tras la eliminación en agosto de 1787 de la cátedra de matemáticas del Lycée y el cierre a principios de 1788 de l'École royale Militaire de Paris, la plaza de profesor de matemáticas, física y química en L'École Royale d'Artillerie de Besançon. A Lacroix no le gustó tener que abandonar París, tan rica en eminentes estudiosos y bibliotecas bien surtidas[13]. Según Ehrhardt (2009, p. 17-18) "en este contexto, la redacción del tratado le da ocasión de mantener el contacto con los estudiosos parisinos mientras les informa de los avances de sus trabajos".

En efecto, en su nuevo cargo Lacroix estaba bajo la autoridad directa de Laplace que parece haber hecho todo lo posible para facilitarle su tarea. En una carta del 7 de marzo de 1789, Laplace anuncia a Lacroix el envío de una colección de trabajos sobre astronomía[14].

En enero de 1792 Lacroix escribe de nuevo a Laplace agradeciéndole los esfuerzos que ha realizado y quejándose de las dificultades que tiene para documentarse en Besançon. Aprovecha la ocasión para recordarle que en 1787 comenzó la preparación de su gran tratado sobre cálculo diferencial e integral y termina la carta con una discusión sobre el método sintético que ha utilizado. Laplace felicita a Lacroix por su iniciativa en una carta fechada el 28 de enero de 1792, en la que además se puede leer:

> Es una obra que aún falta, a pesar de la de Euler[15], que ya empieza a envejecer.[16]

Según Caroline Ehrhardt (2009, pp. 17-18), una de las razones que estimulan a Lacroix a la elaboración del *Traité du calcul* es la necesidad de mejorar su situación a través del reconocimiento científico: "muy probablemente responde a una necesidad obtener reconocimiento científico para mejorar su situación". "Además, este trabajo evidencia la profundidad del conocimiento matemático de Lacroix".

---

[13] "Il partit pour cette ville, en octobre 1788, désolé de quitter la capitale, si riche en savants éminents et en bibliothèques bien fournies." (Taton, 1953, pp. 350-351)
[14] Carta publicada por Taton. (Taton, 1953, p.351)
[15] Refiriéndose a la *Introductio*. (Taton, 1953, p. 355)
[16] "C'est un ouvrage qui manque encore, malgré celui d'Euler qui commence déjà à vieillir." (Taton, 1953, p.355)

3º.- El importante enfoque universal de Lacroix.

Schubring (1992, p. 277) resalta como objetivo principal de Lacroix el desarrollo de un cuerpo coherente de matemáticas escolares, desde secundaria hasta la educación superior; enfoque que Lacroix expresó mediante el título principal que adoptó para implicar el carácter integral de su obra: *Cours complete de mathématiques*. Enfoque universal de la mayor importancia dado que se llevó a cabo en el momento que se estableció por primera vez un sistema de educación general y público, dotando a la matemáticas de un nuevo status. Pero la estructura de la presentación del conocimiento no estaba preparada ni adaptada para este tipo de enseñanza; lo que hacía necesario una reestructuración y redefinición del desperdigado conocimiento matemático guiada por objetivos educativos. Parece ser, según Schubring (1992, pp. 277-278) que fue Lacroix el primero que manifestó explícitamente esta demanda, desde el mismo momento en que empezó a trabajar en su *Traité du calcul*.

En el prefacio de la primera edición del *Traité du calcul* hace una declaración de principios acerca de la necesidad de la elaboración de manuales para la enseñanza. En las primeras páginas de este largo prefacio argumenta esta necesidad (citamos in extenso el prefacio por su importancia):

Cuando los elementos de una ciencia son incompletos, los que la estudian, desalentados por la multitud de libros que habría de consultar para adquirir las nociones de las que carecen, sólo con temor se embarcan en una carrear cuyo fin no perciben. Las Matemáticas son quizá de todas las ciencias aquella cuyas obras elementales hacen conocer menos su extensión y sus progresos. Haciendo retroceder los límites del Análisis, los grandes Geómetras de nuestro siglo han dado al estilo de este lenguaje, una perfección que necesariamente debe influir en la manera de presentar las verdades conocidas anteriormente. Se observa en la historia de las Matemáticas ciertas épocas en	*Lorsque les Éléments d'une science sont incomplets, ceux qui l'étudient, découragés per la multitude des livres qu'il faudrait consulter pour acquérir les notions qui leur manquent, ne s'engagent qu'avec crainte dans une carrière dont ils n'aperçoivent point le terme. Les Mathématiques sont peut-être de toutes les sciences, celle dont les ouvrages élémentaires font connaître le moins l'étendue et les progrès.* *En reculant les bornes de l'Analyse, les grands Géomètres de notre siècle ont donné au style de cette langue, une perfection qui doit influer nécessairement sur la manière de présenter les vérités connues avant eux. On remarque dans l'histoire des Mathématiques certaines époques où, sans que la vérité des*

las que, sin que la verdad de las proposiciones particulares haya sufrido daño alguno, su encadenamiento sistemático ha cambiado por las conexiones que han producido los nuevos descubrimientos. Los principios se han vuelto más fecundos, los detalles menos necesarios, y la generalidad de los Métodos ha permitido abrazar la ciencia como un todo, a pesar de los pasos inmensos realizados.	*propositions particulières n'ait souffert aucune atteinte, leur enchaînement systématique a changé par les rapprochements auxquels les novelles découverts ont donné lieu. Les principes sont devenus plus féconds, les détails moins nécessaires, et la généralité des Méthodes a permis encore d'embrasser la science en entier, malgré les pas immenses qu'elle avait faits.*
Estamos, creo yo, en una de esas épocas; sólo la reunión de numerosos materiales, relativos al Cálculo diferencial y al Cálculo integral, dispersos en las colecciones Académicas, puede dar a conocer todas las riquezas de esta importante rama del Análisis, y reducir a un pequeño número de métodos generales, una multitud de procedimientos particulares que provienen de la infancia de estos cálculos, pero no es mediante una simple recopilación como se alcanzará este objetivo.	*Nous sommes, à ce que je crois, dans une de ces époques; la réunion des nombreux matériaux, relatifs au Calcul différentiel et au Calcul intégral, épars dans les collections Académiques, peut seule faire connaître toutes les richesses de cette branche importante de l'Analyse, et réduire à un petit nombre de méthodes générales, une foule de procédés particuliers qui tiennent à l'enfance de ces calculs; mais ce n'est point par une simple compilation, qu'on atteindra ce but.*
Habiéndose presentado los mismos descubrimientos a varios Geómetras, bajo puntos de vista muy diferentes, resultó de ello varios métodos, entre los que hay que elegir, o que hay que exponer en un orden que ponga de relieve las relaciones por las que se unen unos a otros; y, por último, no es menos necesario dar, por así decirlo, un tono uniforme, que no deje que se perciba diferencia alguna entre lo que se debe a un autor y lo que se ha tomado de otro, y extienda sobre el conjunto un mismo grado de precisión y de claridad.	*Les mêmes découvertes s'étant présentées à plusieurs Géomètres, sous des points de vue très-différents, il en est résulté plusieurs méthodes, entre lesquelles il faut faire un choix, ou qu'il faut exposer dans un ordre, qui mette en évidence les rapports par lesquels elles se lient les unes aux autres; enfin, il n'est pas moins nécessaire de donner, pour ainsi dire, à toutes, une teinte uniforme, qui ne laisse point apercevoir de différence, entre ce qu'on doit à un auteur, et ce qu'on a emprunté d'un autre, et répande sur le tout un égal degré de précision et de clarté.*
Tal es la tarea que me he impuesto, he	

sentido todas las dificultades que tendría que superar para completarla con éxito, pero la importancia de la materia y el deseo de ser útil me han apoyado en esta penosa carrera, y especialmente la persuasión de que un ensayo de este tipo, por muy alejado que pueda estar de la perfección, contribuiría sin embargo al avance de la ciencia. Antes de dar cuenta del plan que he seguido, creo que debo poner ante los ojos del lector el origen y los progresos del Cálculo diferencial y del Cálculo integral, de modo que pueda apreciar mejor las razones que han determinado el orden que he adoptado. El descubrimiento del Cálculo diferencial y del Cálculo integral no se remonta más que al siglo pasado, pero las cuestiones por las que se ha desembocado en él estaban presentes desde los primeros tiempos de la Geometría. Cuando los antiguos Geómetras quisieron comparar las figuras curvilíneas, ya sea entre ellas, o con figuras rectilíneas, se vieron obligados a dar un nuevo giro a sus demostraciones…	*Telle est la tâche que je me suis imposée; j'ai senti toutes les difficultés que j'aurais à vaincre pour la remplir avec succès, mais l'importance de la matière et le désir d'être utile, m'ont soutenu dans cette pénible carrière, et surtout la persuasion qu'un essai dans ce genre, quelque éloigné qu'il pût être de la perfection, contribuerait néanmoins à l'avancement de la science. Avant de rendre compte de plan que j'ai suivi, je crois devoir remettre sous les yeux du lecteur l'origine et les progrès du Calcul différentiel et du Calcul intégral, afin qu'il puisse mieux apprécier les raisons qui ont déterminé l'ordre que j'ai adopté.* *La découverte du Calcul différentiel et du Calcul intégral ne remonte qu'au siècle dernier, mais les questions par lesquelles on y a été conduit s'étaient présentées dès les premiers temps de la Géométrie. Lorsque les anciens Géomètres ont voulu comparer les figures curvilignes, soit entre elles, soit avec des figures rectilignes, ils ont été obligés de donner un tour nouveau à leurs démonstrations…*

.

El prefacio sigue con una breve historia del cálculo diferencial e integral, así como de los antecedentes.

4º.- El éxito de sus manuales.

La política educativa francesa estaba caracterizada desde 1763 por el dominio del libro de texto como medio para suplir a los buenos maestros. Tras la Revolución Francesa, la publicación de buenos libros de texto tenía una importancia primordial porque asegurarían, por una parte la lealtad al carácter republicano, y por otra la aplicación uniforme de “el buen método”[17]. El primer intento en 1794 de producir buenos libros de texto de escuelas primarias falló drásticamente y los maestros de las *Écoles Centrales*, establecidas en 1795 como escuelas secundarias superiores, optaron por los libros de texto tradicionales de Bézout. Lacroix fue miembro del jurado del concurso de 1794 y por ello no pudo participar. Pero en 1795 produjo sus primeros libros de texto.

En 1803 Napoleón suprimió las escuelas republicanas y las sustituyó por los Lycées. La comisión que tenía que seleccionar los libros, eligió para matemáticas en secundaria y estudios superiores exclusivamente los libros de Lacroix. Según Schubring (1992, p. 277), la enumeración en 1819 de las diferentes partes de la serie completa del curso de matemáticas de Lacroix y el número de ediciones, muestran su notable éxito de más de veinte años:

> COURS COMPLET DE MATHEMATIQUES à l’usage d l’Ecole centrale des quatre-Nations : Ouvrage adopté par le Gouvernement pour les Lycées, Ecoles secondaires, Colléges, etc., par S. F. LACROIX, Membre de l’Institut et de la Légion-d’Honneur, Professeur au Collège royal de France. Etc., 9 vol. in-8.
>
> Prix pour Partis 38 fr. 50 c.
>
> Chaque volume se vend séparément, savoir :
>
> *Traité élémentaire d’Arithmétique*, 14^{e} édition, 1818 2 fr.
>
> *Eléments d’algèbre*, 12^{e} édition, 1819 4 fr.
>
> *Eléments de Géométrie*, 11^{e} édition, 1819 4 fr.
>
> *Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d’Application de l’Algèbre à la Géometrie*, 6^{e} édition, 1813 4 fr.
>
> *Complément des Elémens d’Algèbre*, 4^{e} édition, 1817 4 fr.
>
> *Complément des Elémens de Géométrie, Elémens de Géométrie descriptive*, 4a édition, 1812 3 fr.
>
> *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, 2^{e} édition, 1806 7 fr.
>
> *Essais sur l’Enseignement en général, et sur celui des Mathématiques en particulier, ou Manière d’étudier et d’enseigner les Mathématiques*, 1 vol. in-8., 2^{e} édition, 1816 5 fr.
>
> *Traité élémentaire de Calcul des Probabilités*, in-8., 1816 5 fr.

[17] Schubring (1992, p. 276).

> *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, 2e édition, revue et considérablement augmentée, 3 gros vol. in-4., avec planches. Prix pour Paris, 66 fr.

También disponemos de otro indicador del éxito de sus obras: las traducciones. La mayoría de sus obras han sido traducidas al alemán, y muchas de ellas se tradujeron al inglés. Aunque la comunidad inglesa que estaba interesada en las matemáticas era reducida, en 1816 Charles Babbage junto a Peacock y Herschel publicaron una traducción del *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral* y lamentaron en 1829 en una carta dirigida a Lacroix que las condiciones en Bretaña no permitían una traducción de la edición completa en tres volúmenes[18].

Boyer (2007, p. 602) comenta que en 99 años, contando solamente las ediciones en francés, aparecieron 25 ediciones del *Traité de Trigonométrie*. En 1848 se publicaba la edición 20ª de su Aritmética y la 16ª de su Geometría; en 1859 la 20ª edición de su Álgebra; y en 1881 la 9ª de su Cálculo.

Hemos recopilado en una tabla (ver anexo II) algunas de las múltiples ediciones de algunas obras de Lacroix a las que hemos tenido acceso.

Del proceso de elementarización[19] del *Traité de calcul* surgió el *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* que se utilizó como manual de enseñanza no solo en Europa, también en América.

Pero, ¿por qué tuvo tanto éxito su gran tratado? Según Ehrhardt (2009, pp. 18-21) porque responde a los problemas matemáticos de su época en dos puntos; en primer lugar, porque ha llegado el momento de realizar una síntesis actualizada de la abundancia de investigación analítica del siglo XVIII; en segundo lugar por su diseño, el libro encaja perfectamente en el contexto de aprendizaje de las matemáticas superiores tal como estaban antes de la Revolución. Y aunque este tratado no está destinado al mundo académico (sino a las personas que quieran conocer los métodos más útiles del análisis) coincide su publicación con la aparición de una nueva audiencia, la de los jóvenes que tras terminar sus estudios en la escuela secundaria entran en l'École polytechnique. Lo que supone un uso efectivo de su tratado.

[18] Schubring, (1992, p. 292).

[19] Proceso de elementarización entendido en el sentido de Schubring (1992, p. 288): "la transposición del conocimiento en conocimiento enseñable y en un método relacionado".

5º.- Repercusión en la enseñanza de las matemáticas en España.

Los textos de Lacroix influyeron en los autores españoles, por ejemplo en Vallejo.

> Se debe destacar la importancia que tiene, dentro del panorama de la matemática española, el hecho de que el texto de Lacroix se utilizara en España durante el curso 1803-1804, aunque sólo fuera para inspirar las clases de un profesor. Mucho más teniendo en cuenta que el texto de Lacroix se había publicado en 1797 y que la influencia de este autor se encuentra plasmada en las *Adiciones*. (Arenzana, 1990, p. 13).

Pero sobre todo, su *Curso completo elemental de matemáticas* se tradujo al castellano y se reeditó varias veces. Hay diversas referencias sobre esta traducción bastante peculiares. La primera de ellas la hemos obtenido del tomo V (p. 53) de las memorias de Manuel de Godoy editado en Madrid el año 1838 (*Cuenta dada de su vida política por Don Manuel Godoy, príncipe de la Paz; ó sean Memorias críticas y apologéticas para la historia del reinado del Señor D. Carlos IV de Borbón*).

> Don José Rebollo y Morales, catedrático de la escuela de los pages del rey, comenzó a publicar en 1807 su traducción del *Curso completo elemental de matemáticas* de Mr. Lacroix, adoptado entonces por el gobierno francés para todos los liceos y escuelas secundarias. Rebollo mejoró todavía el original, le hizo varias adiciones muy necesarias, y ordenó é ilustro su traducción de tal modo que resultase en ella una obra enteramente nacional.

La segunda, en la *Gazeta de Madrid* del viernes de 1807 (núm 89, p. 1031).

> LIBROS
>
> Curso completo elemental de matemáticas puras, compuesto en francés por S. F. Lacroix, miembro del instituto nacional de Francia, y traducido por D. Josef Rebollo y Morales, catedrático de los caballeros pages de S. M.: tomo I.º, que contiene la aritmética. Esta obra es mirada por todos los inteligentes, no solo como la mas completa y metódica de quantas hasta ahora se conocen de su clase, sino también como la única adaptada al grado de perfeccion en que hoy dia se hallan las matemáticas. El gran número de ediciones que se han hecha de ella, y sobre todo el haber el haber sido adoptada por el gobierno francés para todos los liceos y escuelas secundarias de aquel imperio, son pruebas nada equívocas del singular aprecio que generalmente ha merecido. El traductor, que se ha propuesto hacerla enteramente nacional, ha hecho en ella todas las variaciones que son indispensables para el logro de este objeto. Asi que, en la aritmética ha sustituido nuevos

> exemplos, y ha agregado la correspondencia de un gran número de medidas, pesos y monedas extranjeras, y entre ellas las nuevas francesas con las españolas. Se vende a 16 cs. en rústica y 20 en pasta en la librería de Castillo, frente á las gradas de S. Felipe, en la de Perez, calle de las Carretas; y en Cádiz en la de Pajáres.

Pero lo más importante, son las referencias que revelan el uso educativo del *Curso completo elemental de matemáticas Puras* de Lacroix, en el momento en que en España se está configurando el sistema de enseñanza general y público. La obra de Lacroix, según Gómez (2006), es una obra de referencia en este momento clave de la historia de la educación matemática en España.

> Para describir y caracterizar estos cambios es fundamental situarse en el momento histórico en que la enseñanza de la aritmética comienza a asumir planteamientos que son propios del álgebra. Ese momento puede situarse en España en las primeras décadas del siglo XIX y coincide con los años en que está configurándose el sistema general y público de enseñanza. Las obras texto de referencia en ese momento clave de la educación y formación matemática española, son en opinión generalizada, el *Tratado Elemental de Matemáticas* de Vallejo y el Curso *Completo Elemental de Matemáticas Puras* de Lacroix. (Gómez, 2006, p. 48)

> En 1851 fue aprobado en el concurso de textos para la segunda enseñanza (Maz, 2005), pero ese año, el panorama de los manuales españoles era muy diferente al de 1813, ya que el fulgor de los autores franceses y la escasa producción española, había traído consigo la aparición de traducciones de los manuales de más éxito o más populares de las escuelas militares y técnicas francesas, entre ellos el de Lacroix, que fue utilizado como de texto en las facultades (llamadas de Filosofía en la época) para desarrollar los contenidos de las matemáticas superiores. (Gómez, 2006, p. 49)

No es que se utilizara sin más en las facultades, sino que se estableció como libro de texto en los estudios superiores según aparece en el artículo 42 del título IV de *Decretos del rey nuestro señor don Fernando VII, y reales órdenes, resoluciones y reglamentos generales expedidos por las secretarías del despacho universal y consejos de S. M. en los seis meses contados desde 1º de julio hasta fin de diciembre de 1824. Tomo 9* (p. 241) publicado el año 1825, donde se detalla el plan de estudios de Filosofía:

> Art. 42. Segunda: en todas está cátedras durarán las lecciones hora y media por la mañana y una por la tarde; sirviendo de texto para las Matemáticas puras las obras

de Mr. Lacroix, traducidas por Rebollo, […][20]

En el discurso inaugural de la Sección Primera (Matemáticas) del Congreso de Valladolid de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias a cargo de Julio Rey Pastor, *Los progresos de la Matemática en España y los progresos de España en la Matemática* (1915), hace un par de referencias al uso en las facultades de los textos de Lacroix. La primera de ellas en una nota a pie de página, en la que reconoce el uso de las traducciones de Lacroix y Monge, aunque no detalla cuáles fueron esas obras.

> Justo es reconocer que en la Escuela de Caminos se enseñaba ya, hacia el año 40, la Matemática de fines del siglo XVIII, por las traducciones de Lacroix y Monge.

Sigue el discurso comparando la calidad inferior de los textos (de Vallejo, Odriozola, Feliú, Pascua, García San Pedro) utilizados en las Universidades y Academias militares respecto a los de Lacroix, que califica de monumento y síntesis de la Matemática del siglo XVIII.

> La importancia que se ha concedido esta fecha 1845, estriba en haberse realizado en ella la organización de las enseñanzas universitarias de estas Ciencias físico-matemáticas, creándose una sección especial dentro de la Facultad de Filosofía y Letras; y, además, en haberse fundado por entonces (1847) la Real Academia de Ciencias, de Madrid.
>
> Desgraciadamente, toda organización es inútil cuando no hay hombres aptos para representarla; y aunque se procuró "elegir el personal más lucido que pudo reunirse, por oposición una gran parte de él, y con los medios materiales de que antes se carecía", aquellos hombres, educados en la antigua Matemática, no pudieron introducir las ideas nuevas de que ellos carecían ; y las obras de Vallejo, Odriozola, Feliú, Pascua, García San Pedro que sirvieron durante muchos años de texto en las Universidades, en el Colegio general militar, en la Academia de Artillería, etc., por su materia entran de lleno en el siglo XVIII, siendo todas ellas muy inferiores a la de Lacroix, monumento y síntesis de la Matemática de aquella centuria.

---

[20] En 1823 se reestablece el poder absoluto de Fernando VII y con ello la derogación del Reglamento General de la Instrucción Pública de 1821 y la promulgación del Plan literario de estudios de las universidades del Reino (1824).
Véase http://www.upct.es/seeu/_as/divulgacion_cyt_09/Libro_Historia_Ciencia/web/mapa-centros/constitucion_1812.htm

> Bien es cierto que "antes del plan de 1845 estábamos trescientos años detrás de la Europa culta" como dice atinadamente Vicuña y justo es, por tanto, consignar este apreciable progreso.

6º.- Porque además de escribir libros de texto también escribió sobre la enseñanza en general y la enseñanza de las matemáticas en particular.

La diferenciación entre libros de texto para estudiantes y para maestros aparece por primera vez, según Schubring (1992, p. 291) en el plan de educación de Condorcet de 1792, en el que recomienda libros metodológicos separados para maestros. Pero además, para Schubring (1988), Condorcet fue el primero en realizar una distinción entre el libro para los alumnos y el libro para el profesor, distinción de la que Schubring dice que se debe interpretar como el comienzo de una didáctica de las matemáticas porque hizo tomar conciencia de la necesidad de reflexionar sobre los métodos de enseñanza en la instrucción pública:

> La última obra de Condorcet constituye una innovación muy importante en la producción de los manuales: él es el primero en efectuar una diferenciación entre libro para los alumnos y libro de acompañamiento para el profesor. Esta distinción, que hace tomar conciencia del hecho de que una instrucción pública necesita una reflexión sistemática sobre los métodos de enseñanza, debe ser interpretada como el comienzo de una didáctica de las matemáticas. Hasta el último momento, Condorcet por tanto habrá trabajado por la promoción de una verdadera instrucción pública. (Schubring, 1988, p. 173)[21]

En el concurso para la elaboración de libros elementales de 1794 surgió la tarea de escribir consejos metodológicos para los maestros. El único que mereció una distinción fue un libro de texto de aritmética de J. B. Sarret en dos volúmenes: un libro de texto para estudiantes y un comentario metodológico para los maestros. Ambos volúmenes se publicaron en 1798.

Lacroix no publicó ningún comentario metodológico que acompañara a sus libros de texto, sin embargo en 1805 publicó un ensayo de discusiones metodológicas de la enseñanza en general y de las matemáticas en particular: *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques. En particulier*[22]. Según Ehrhardt (2009, p. 37)

[21] Traducción que hemos realizado para este trabajo.
[22] Se reeditó en 1816, 1828 y 1838.

en este ensayo se superponen de una manera particularmente explícita las tres facetas de Lacroix: la de profesor, la de matemático y la del teórico de la educación.

El ensayo está dividido en dos secciones (figura 1): la primera dedicada a la enseñanza en general durante el siglo XVIII; y la segunda, a la enseñanza de las matemáticas; y una introducción general, que según Ehrhardt (2009, p. 38), revive con la tradición filosófica de la Ilustración, cuyas escuelas centrales, que Lacroix defiende en la primera sección, representan en la práctica el mismo plano ideológico: el autor se sitúa en la tradición de los matemáticos-filósofos, interesados por cuestiones sociales, a la manera de dos modelos para él, Condorcet y D'Alembert.

La segunda sección está divida en tres partes: la primera de ellas dedicada a la manera de enseñar las matemáticas y de apreciar, en los exámenes, el saber de los que las han estudiado. La segunda, Del Método en Matemáticas, según Ehrhardt (2009, pp. 37-38) "constituye una reflexión epistemológica sobre el análisis y la síntesis, nutrida de la maestría de los principales textos científicos y filosóficos, esta reflexión se repite en muchos textos contemporáneos sobre las matemáticas, que lo convirtieron en un modelo en la materia". En la tercera y última parte analiza el Curso elemental de Matemáticas puras, al uso de la Escuela central de las Cuatro Naciones. Divide, a su vez este análisis en cinco partes; De la aritmética, Elementos de Álgebra, Elementos de Geometría, Complementos de los Elementos de Geometría y Tratado elemental de Trigonometría.

Este análisis es para Ehrhardt (2009, p. 38) "una revisión crítica de la experiencia de Lacroix como profesor. Autorizando así a los contemporáneos a interpretar este libro como una especie de manual de pedagogía a la atención de los profesores de ciencias".

SECONDE SECTION.

DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES.

Pages.

Figura1. Índice de materias de la 4ª edición (1838) de *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier*.

1.2. OBJETO

Tras la elección de los textos en los que queremos conocer cómo se han concebido, configurado y establecido los contenidos escolares respecto al uso de las coordenadas en la representación de funciones, queda por determinar qué aspectos concretos queremos analizar. El estudio durante la etapa de educación secundaria de las funciones se basa fundamentalmente en la representación en coordenadas cartesianas, ¿qué puede aportar el estudio del establecimiento de las coordenadas en el momento que se está formalizando en la comprensión de las dificultades que muestran los estudiantes en el uso de la representación de funciones mediante coordenadas cartesianas?

El objeto de este trabajo es la búsqueda de las dificultades que a lo largo de la historia se han tenido que vencer para establecer un sistema de coordenadas cartesianas tal como aparece en la actualidad en los libros de texto escolares. Búsqueda que hemos concretado en la exploración de la sistematización de las coordenadas en la representación gráfica de funciones en la *Introductio*, su repercusión en la obra de Lacroix, y la "elementarización" y organización con fines escolares que realiza Lacroix de las coordenadas en general y en el estudio de las propiedades de las funciones, en particular.

En los primeros cursos de la educación secundaria la localización de puntos en el plano genera ciertas dificultades en algunos estudiantes, sobre todo en la localización de los puntos sobre los ejes coordenadas y la determinación de puntos cuando alguna de sus coordenadas es negativa. Podemos hacer la hipótesis de que esas dificultades están relacionadas de alguna manera, es decir, salvando las diferencias que conllevan los distintos contextos históricos, culturales y sociales en que se desarrolla el trabajo de los alumnos y el de los matemáticos estudiados, con las dificultades principales que hemos encontrado en los textos que hemos analizado. Esas dificultades están ligadas fundamentalmente con la dotación de significado de las coordenadas negativas y con el paso de la consideración de las coordenadas como magnitudes a la consideración de las coordenadas como números, y su superación permitió establecer unos ejes de coordenadas absolutos y con ello la localización de puntos en el plano cartesiano.

2. CONCEPTO DE FUNCIÓN.

Desde un análisis fenomenológico el concepto de función como objeto mental es, según Puig (1997, p. 92), mucho más complejo que el de número, los objetos geométricos o incluso la razón, lo que supone que durante la Educación Secundaria lo que se puede constituir como objeto mental es la idea de variable y de dependencia funcional.

Puig (1997, p. 93), siguiendo a Freudenthal (1983) afirma que el término "variable", hasta que las matemáticas actuales lo usaron para referirse a los medios para formular proposiciones de carácter general, siempre había significado algo que varía, algo del mundo físico, social, mental o de las matemáticas que se percibe o se imagina que está variando. El origen fenomenológico del concepto de función está en el momento en que se produce una dependencia entre variables que se presenta en cualquiera de los mundos arriba citados. La palabra "función" no se usa de forma parecida a la actual hasta Euler, pero es posible interpretar como funciones "las descripciones mediante tablas de los movimientos de los cuerpos celestes hechas por los astrónomos desde los tiempos paleobabilónicos".

Desde un punto de vista histórico-epistemológico podemos distinguir diferentes etapas sobre el concepto de función hasta la definición de Euler y de los matemáticos de la Revolución Francesa:

2.1. EDAD ANTIGUA

2.2. EDAD MEDIA

2.3. SIGLO XVII

2.4. SIGLO XVIII

2.5. TRAS LA REVOLUCIÓN FRANCESA

2.1. EDAD ANTIGUA

Sobre el concepto de función en la matemática babilónica aparecen posiciones contrarias en la bibliografía. Para Youschkevich (1976) en la Antigüedad no existió una idea general del concepto de función, mientras que, según Sierra (1998), para Petersen (1974) las tablas babilónicas poseían un cierto sentido de la funcionalidad pues no se limitaban a una mera tabulación sino que se realizaban interpolaciones lineales y geométricas en busca de regularidades.

2.2. EDAD MEDIA

Para Youschkevich un concepto de función más general y estructurado aparece durante el siglo XIV:

> La noción de una función aparece por primera vez en una forma más general durante el siglo XIV en las escuelas de filosofía natural de Oxford y París. (Youschkevich, 1981, p. 17)

Según Sierra (1998) "las traducciones de las obras de Aristóteles (384-322 a. C.) (en particular de la *Física*) y los estudios de Arquímedes (287-212 a. C.) pusieron de actualidad el estudio del cambio en general. En el Merton College de Oxford se dedujo una *fórmula* de la velocidad de cambio conocida como *regla de Merton* que equivale a la ecuación del espacio en función del tiempo en el movimiento uniformemente acelerado."

Con Oresme se va perfilando el concepto de función al describir las leyes de la naturaleza como leyes que dan una dependencia entre una cantidad y otra. Para Youschkevich (1976), la latitud de una cualidad se interpreta de una manera general como una cantidad variable, a la vez que la línea superior o de las intensidades, como la representación gráfica de cierta relación funcional continua. Ahora bien, es necesario tener en cuenta que esta línea no aparece aislada sino que el fenómeno se representa a través de toda la figura, por su forma y por la superficie que queda bajo la curva. Así, en esta teoría, afirma Youschkevich (1976) que una función queda definida o por una descripción verbal de su propiedad específica o directamente por un gráfico.

2.3. SIGLO XVII

La influencia de la obra de Oresme en Galileo y Descartes está generalmente aceptada. Galileo estaba empezando a entender el concepto de función con mayor claridad. Sus estudios sobre el movimiento denotan una mejor comprensión sobre una relación entre variables.

El Álgebra Simbólica de Viète y el establecimiento de las leyes del movimiento de Galileo propiciaron nuevas vías para poder establecer relaciones funcionales.

Casi al mismo tiempo que Galileo, Descartes aplicaba el álgebra a la geometría en *La Géométrie*. Para Youschkevich (1976) es Descartes quien por primera vez y de forma completamente clara sostiene explícitamente la idea de que una ecuación en x e y es un medio para expresar una dependencia entre dos cantidades variables de manera que permite calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de la otra.

> Prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne *y*, on en trouvera aussi infinies pour la ligne *x*, et ainsi on aura une infinité de divers points tels que celui qui est marqué *C*, par le moyen desquels on décrit la ligne courbe demandée. (Descartes, 1637, p. 386)

Una curva puede dibujarse al permitir que una línea tome sucesivamente un número infinito de valores distintos. En Descartes el concepto de función está asociado a la construcción de una curva, ya que está expresado en términos de magnitud.

Youschkevich (1976) considera que tanto Descartes como Fermat inician una nueva era en las matemáticas al aplicar el álgebra a la geometría presentando el método analítico de la introducción de las funciones. Para Fermat la función y el argumento se denominan cantidades desconocidas, y el término cantidad en realidad significa, según Youschkevich, segmentos de recta cuya longitud varía de forma continua.

> Aussitôt que deux quantités inconnues apparaissent dans une égalité, il y a un lieu et le point terminal de ligne des deux quantités décrit une ligne droite ou courbe. (Fermat) en Youschkevich (1981, p. 25)

De hecho, los matemáticos posteriores a Descartes y Fermat se dieron cuenta de que los métodos de la geometría analítica no se podían aplicar solamente a las funciones elementales sino también a las funciones algebraicas en general. Surge entonces la representación de una función mediante su expresión algebraica. De manera independiente, Mengoli, Mercator, Gregory y Newton hacen posible la representación analítica de toda relación funcional estudiada en esta época.

> El descubrimiento, hecho de forma independiente por M. Mengoli, N. Mercator, J. Gregory y I. Newton, de la manera de desarrollar funciones enteras en serie, hizo posible la representación analítica de toda relación funcional estudiada en esta época. (Youschkevitch, 1981, pp. 30-35)

El primero que consideró el concepto de función como expresión "analítica" fue, en 1667, J. Gregory en *Vera circuli et hiperboles quadrature*:

> Decimos que una cantidad *x* está compuesta de otras cantidades *a*, *b*,… si *x* resulta de *a*, *b*,…por las cuatro reglas elementales (suma, resta producto y división), extracción de raíces o por cualquier operación imaginable. (Youschkevitch, 1981, p. 33).

En esta definición, el término función no aparece, solamente aparece el de cantidad. Según Durán (2003, pp. 10-11), existe cierta ambigüedad de uso del término *cantidad* durante la segunda mitad del siglo XVII y buena parte del XVIII . En particular Durán analiza el uso de *cantidad* en *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias* de Newton. En esta obra, Newton habla de cantidad sin más, no utiliza los calificativos de constante y variable. Para Durán, la forma en la que Newton habla y maneja las funciones en el *Analysis* está muy contaminada de geometría. El primer capítulo contiene un *método general que cavilara un día para medir la cantidad de las curvas mediante una serie infinita de términos*, que Durán considera que probablemente en la actualidad escribiríamos un método general para “estudiar las funciones mediante desarrollos en serie”. Durán añade que, como otros matemáticos contemporáneos, Newton manejó dos concepciones básicas de función parecidas pero no idénticas. La primera, función como relación entre variables, es decir como ecuación entre x e y; la segunda, función como asociación de valores, esto es, como una expresión formada a partir de la variable x, que permite asignar un valor al correspondiente valor de x. Ambas concepciones estaban favorecidas porque las leyes de la física (filosofía natural) se expresaban como dependencia de cantidades variables o como asignación de valores.

La palabra *función* aparece por primera vez en los manuscritos de Leibniz de 1673 en *La méthode inverse des tangents ou au sujet des fonctions*. O’Connor y Robertson afirman que los primeros usos del término *función* “encapsulaban ideas del concepto moderno pero de manera mucho más restrictiva.”

> Como tantos términos matemáticos, la palabra función fue usada por primera vez con su significado no-matemático. Leibniz escribió en agosto de 1673 de:
>
> *[...] otros tipos de líneas que, dada una figura, llevan a cabo alguna función.*
>
> Johann Bernoulli, en una carta a Leibniz escrita el 2 de septiembre de 1694, describe una función como:
>
> *[...] una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes.*
>
> En un artículo de 1698 sobre problemas isoperimétricos, Johann Bernoulli escribe sobre ‘funciones de ordenadas’ (ver [32]). Leibniz le escribió a Bernoulli diciendo:
>
> *[...] Me agrada que use el término función en el mismo sentido que yo.*

Por otra parte, los términos cantidad constante y cantidad variable también fueron introducidos por Leibniz (que también introdujo los términos de coordenada y parámetro) en 1692, aunque su difusión se debió a que aparecieron en la primera definición en la obra *Analyse des infinitament petits* de L'Hôpital (1696):

> se llaman cantidades variables aquéllas que aumentan o disminuyen continuamente; y por el contrario constantes las que permanecen siendo las mismas mientras las otras cambian. (Youschkevitch, 1981, p. 33)

La primera definición explícita de una función como expresión analítica aparece en un artículo de J. Bernoulli publicado en 1718 en las memorias de l'Académie Royale des sciences de Paris:

> Definición. Se llama función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de alguna manera por esta magnitud variable y constantes. (Youschkevitch, 1981, p. 35)

Youschkevitch añade que en esta definición, Bernoulli no da ninguna indicación sobre la manera de constituir funciones a partir de la variable independiente.

2.4. SIGLO XVIII

Para Youschkevitch (1981, p. 36). el desarrollo posterior esencial del concepto de función es la obra de Euler, el alumno de Bernoulli. Euler somete (en el primer capítulo del volumen 1 de la *Introductio*) a un estudio más detallado el concepto de función tal como fue efectivamente utilizado en análisis matemático. Afirma que en su definición de función, Euler sigue, una vez más, a su maestro J. Bernoulli, remplazando sin embargo la palabra "cantidad" por "expresión analítica".

> Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de la manera que sea, de esta cantidad y de números o de cantidades constantes.

Previamente, para poder dar esta definición de función, Euler define las cantidades constantes y variables como números de cualquier género. Las primeras deben conservar siempre el mismo valor constante, y las segundas abarcan todos los valores. Para designarlas utiliza las letras (tal como estableció Descartes en *La Géométrie*) a, b, c…, para las constantes y z, y, x…, para las variables, cuyo uso ya era habitual en el siglo XVIII. Pero olvida definir expresión analítica, y en los ejemplos que nos presenta tampoco explica qué es exactamente una expresión analítica. Éste es el motivo por el que Boyer (2007, p. 558) afirma que en la actualidad esta definición es inaceptable. A pesar de ello, la idea de función pasó, a partir de la *Introductio*, a ser la idea fundamental del análisis. Tampoco Euler estaba satisfecho con esta definición y por ello en el primer artículo del capítulo IV, dedicado al desarrollo de las funciones mediante series de potencias, explica con más detalle el significado de expresión analítica. La restricción que suponía considerar las funciones como expresiones analíticas desparece en una nueva definición en 1755 en sus *Institutiones Calculi Differentialis*. Para O'Connor y Robertson[23], en este libro definió una función de manera totalmente general, dando lo que podemos razonablemente afirmar que era una definición verdaderamente moderna de función:

> Si algunas cantidades dependen de otras del tal modo que, si estas últimas cambian también lo hacen las primeras, entonces las primeras cantidades se llaman funciones de las segundas. Esta definición se aplica de manera más bien amplia e incluye todas las formas en que una cantidad puede ser determinada por otra. Si, por lo tanto, x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de x de cualquier modo, o que son determinadas por ella, son llamadas funciones de x.

Lo que podría haber sido un gran logro si Euler no se hubiera limitado en este tratado a utilizar en la práctica solamente funciones analíticas.

2.5. Tras la Revolución Francesa

La definición de Bernoulli y Euler de una función como una expresión analítica cuya forma más general es una serie entera, fue aceptada por otros muchos matemáticos hasta que Lagrange llamara función a toda expresión de cálculo en su *Teoría de las funciones analíticas*. La definición dada por Euler se fue implantando progresivamente como se puede ver en los textos de Condorcet, Lacroix, Fourier, Lobatchevshi, Dirichlet…

Condorcet parece haber sido el primero, según Youschkevitch (1981, p. 55), en desarrollar la definición general de Euler de 1755. En 1778 Condorcet envió el manuscrito incompleto, dos de cinco partes previstas que no llegaron a publicarse pero que sí conocieron sus contemporáneos franceses, de un tratado de cálculo integral a la Academia de Ciencias de París. La primera parte está dedicada a las funciones analíticas y en ella distingue tres tipos de funciones que nosotros clasificaríamos como: funciones explícitas, implícitas dadas sólo por ecuaciones no resueltas y funciones que se definen

[23] O'Connor y Robertson: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Functions.html. Traducciones de Covadonga Escandón Martínez

a partir de consideraciones físicas tales como las que son solución de una ecuación diferencial. Condorcet define función analítica de la siguiente forma:

> je suppose que j'aie un certain nombre de quantités *x*, *y*, *z*,..., *F*, et que pour chaque valeur déterminée de *x*, *y*, *z*, etc., *F* ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent: je dis que *F* est une fonction de *x*, *y*, *z*,...
>
> Supongo que tengo cierto número de cantidades *x*, *y*, *z*,..., *F*, y que para cada valor determinado de *x*, *y*, *z*, etc., *F* toma uno o más valores determinados: yo digo que *F* es una función de *x*, *y*, *z*… (Youschkevitch, 1981, p. 57)

Y más adelante añade que *F* es una función de *x*, *y*, *z*, incluso si no se conoce la manera de expresar *F* en *x*, *y*, *z*, ni la forma de la ecuación entre *F* y *x*, *y*, *z*.

Lacroix, siguiendo las definiciones de Euler y Condorcet, definió función en *Traité du calcul* de la siguiente manera:

> Cada cantidad cuyo valor depende de una o más cantidades se llama una función de éstas últimas, se conozca o no qué operación es necesario usar para llegar de la última a la primera. (Youschkevitch 1981, p. 58)

En 1821, Cauchy en *Cours d'analyse* dio una definición de función cuya interpretación esencialmente es la misma que la de Lagrange. Para O'Connor y Robertson hace de la dependencia entre variables el centro del concepto de función, diseñado para cubrir tanto las funciones implícitas como las explícitas que definirá inmediatamente después. Además afirman que Cauchy todavía piensa en una función en términos de una fórmula, en términos de expresiones analíticas.

> Si cantidades variables son unidas entre ellas de tal modo que el valor de una de ellas está dado, se puede llegar a los valores de todas las otras; uno ordinariamente concibe estas distintas cantidades como expresadas mediante una de ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente; las otras cantidades expresadas mediante la variable independiente son aquellas a las que se llaman funciones de esta variable. (O'Connor y Robertson)

Hasta la definición de Fourier observamos la presencia del término de cantidad en todas las definiciones. En *Théorie analytique de la Chaleur* (1822), Fourier dio una definición de función que se alejaba deliberadamente de las expresiones analíticas:

> En general, la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Dados una infinidad de valores de la abscisa *x*, hay un número igual de ordenadas $f(x)$. Todas tienen valores numéricos, ya sean

positivos, negativos o cero. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen unas a otras de una forma cualquiera y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad sola. (O'Connor y Robertson)

Tanto Dirichlet como Lobachevsky aceptaron la definición de Fourier. En 1837 Dirichlet definió función (en un sentido moderno):

si una variable *y* está relacionada con otra variable *x* de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a *x* hay una regla según la cual queda determinado un único valor de *y*, entonces se dice que *y* es una función de la variable independiente. (Boyer, 1986, p. 687)

Y, en 1838, Lobachevsky dio una definición de una función general que todavía necesitaba que ésta fuera continua:

Una función de *x* es un número que está dado para cada *x* y que cambia gradualmente junto con *x*. El valor de la función puede estar dado mediante una expresión analítica o mediante una condición que ofrece una manera de probar todos los números y seleccionar uno de ellos o, finalmente, la dependencia puede existir pero ser desconocida. (O'Connor y Robertson)

Sierra (1998, p. 96) afirma que "la definición de función dada por Dirichlet se ha refinado utilizando elementos de la teoría de conjuntos. La que aparece con más frecuencia en los libros de texto es la dada por Godement (1971):

Se llama función a la terna $f = \{G, X, Y\}$, en donde G, X, Y, son conjuntos que cumplen las condiciones siguientes:

1) $G \in X \times Y$

2) Para todo $x \in X$ existe un y, y sólo un $y \in Y$, tal que$(x, y) \in G$. G es la gráfica de la función.

3. SISTEMATIZACIÓN DE LAS COORDENADAS EN EULER Y EN LACROIX

Ya hemos puesto de manifiesto en los apartados anteriores que los tratados de Euler y de Lacroix se conciben con finalidades muy distintas. Analizaremos en este capítulo cómo cada uno de ellos aborda la sistematización de las coordenadas en el plano.

Veremos que Euler en la *Introductio* prácticamente se limita a definir e indicar cómo y dónde se han de representar las coordenadas, confirmando de esta manera que su intención no era precisamente escribir un libro de texto, aunque posteriormente se convirtiera en un manual para la enseñanza de las matemáticas en gran parte de Europa.

En cambio, en los tratados de Lacroix, y sobre todo en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*, cada definición, cada construcción concerniente a la sistematización de las coordenadas se justifica y explica con todo detalle, explicación que se recuerda en el texto cada vez que el concepto o construcción que se expone lo requiere, corroborando de esta manera su objetivo: publicar libros para facilitar el aprendizaje de las matemáticas. Objetivo que, como analizamos en los capítulos anteriores, revela y justifica en el prefacio del *Traité du calcul*.

En el siglo XVIII el concepto de número negativo está prácticamente delimitado, pero quedan todavía pendientes algunas cuestiones por resolver en cuanto a la expresión y simbolización de las cantidades negativas en el álgebra, y la interpretación y construcción en la geometría de las magnitudes que representan las cantidades negativas.

Para estudiar y comparar la forma en que se realiza la sistematización de las coordenadas en los textos de Euler y de Lacroix, hemos considerado las siguientes cuestiones, que para nosotros son los componentes que hacen posible la sistematización de las coordenadas:

1. la dotación de significado de las cantidades negativas tanto en el álgebra como en la geometría,
2. la fijación de un origen de coordenadas;
3. el significado de la idea de abscisa;
4. el paso de la idea de aplicada a la idea de ordenada;
5. el paso de la consideración de las coordenadas como magnitudes geométricas a su consideración como distancias, lo cual conlleva considerarlas como números, y, finalmente,

6. el establecimiento de los ejes de coordenadas absolutos, es decir, independientes de la curva considerada.

3.1. DOTACIÓN DE SIGNIFICADO DE LAS CANTIDADES NEGATIVAS EN EL ÁLGEBRA.

Ésta es una cuestión bastante compleja y sobre la que hay mucho estudiado y escrito. En concreto, la dificultad en la expresión y simbolización de cantidades negativas en el álgebra provoca ciertas ambigüedades en ambos autores y como consecuencia la imposibilidad de obtener la expresión canónica de una ecuación de forma única.

3.1.1. En la *Introductio*

En el primer tomo de la *Introductio*, Euler define las cantidades constantes y variables como números de cualquier género. Es decir, números afirmativos (refiriéndose a cualquier número positivo, natural o no), negativos (enteros o no), enteros, racionales, irracionales, trascendentes, e incluso el cero (la cifra) y los imaginarios[24]. De dichas cantidades, las constantes deben conservar siempre el mismo valor y las variables abarcan todos los valores. Recordemos que para designarlas utiliza las letras *a*, *b*, *c*…, para las constantes, y *z*, *y*, *x*…, para las variables, tal como estableció Descartes.

Con estas consideraciones cabría esperar que las letras que representan las cantidades, tanto variables como constantes hicieran referencia siempre a cualquier tipo de número y, que por tanto la letra utilizada simbolizara indistintamente una cantidad positiva o negativa. De hecho en las definiciones y las consideraciones generales así ocurre, tal como lo podemos apreciar en el artículo 9 del tomo I:

> 9. *Subdivídanse a su vez las funciones racionales en enteras y fraccionarias.*
>
> En aquéllas, ni *z* tiene exponentes negativos ni las expresiones contiene fracciones en cuyos denominadores entre la cantidad variable *z*: por ende se entiende ser funciones fraccionarias aquéllas en que se dan denominadores que contienen *z*, o exponentes negativos de *z*. Será pues la fórmula general de las funciones enteras $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 +$&c.; y en efecto, no se puede pensar ninguna

[24] Aunque en el siglo XVIII todavía no esté claro el concepto de número imaginario, Euler reconoce la importancia de los mismos en la teoría de funciones. De lo contrario no podría, entre otras cosas, establecer la relación fundamental que existe entre las funciones analíticas elementales senz, cosz y e^z, conocida por todos como la Fórmula de Euler que aparece de forma generalizada en el artículo 183 del tomo I de la *Introductio*:

$$e^{x\sqrt{-1}} = \text{cos.}\, x + \sqrt{-1} \times \text{sin.}\, x$$
$$e^{-x\sqrt{-1}} = \text{cos.}\, x - \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\, x$$

función entera de *z* que no esté contenida en esa expresión. En cuanto a las funciones fraccionarias, por cuanto varias fracciones pueden unirse en una, quedan contenidas en esta fórmula:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \&c.}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \zeta z^5 + \&c}$$

en la que es de notar que las cantidades constantes *a*, *b*, *c*, *d*, &c., α, β, γ, δ, &c., ya sean afirmativas, o negativas, o enteras o fraccionarias, o racionales o irracionales, o aún trascendentes, no hacen mudar de naturaleza a la función. (Euler, 2000, pp. 19-29)

Sin embargo, al analizar con detalle el texto de Euler observamos que esto no siempre se cumple: para expresar cantidades negativas, bien sean constantes o variables, en ocasiones necesita anteponer el signo – a la letra correspondiente. En el tomo II, cada vez que hace referencia a un valor negativo de la variable *x* hace uso de la expresión –*x*.

Está claro, después de la inspección de la figura, que, mientras que la abscisa negativa –*x* está contenida entre los límites *AC* y *AE*, la aplicada *y* es imaginaria, (Euler, 1748, t. II, p. 9).

18. Secundum Figuram apparet, dum Abſciſſa negativa — *x* contiñeatur intra limites *AC* & *AE*, Applicatam *y* fieri imaginariam, eſſeque $PP < Q$: ultra *E* vero ſiniſtrorſum progre-

En el capítulo V de *Élémens d'Algebre*[25] reduce a una forma canónica, generalizando los distintos tratamientos de la ecuación cuadrática que determina una función biforme[26] en la *Introductio* según sea considerada como función (tomo I) o como curva (tomo II), la ecuación de segundo grado, $axx \pm bx \pm c = 0$, en la que apreciamos claramente que al menos *b* y *c* son cantidades positivas. La clasificación de las formas canónicas, así como las soluciones y la comparación con las ecuaciones de las funciones biformes se puede ver en el anexo VII. Sin embargo, por su relevancia hay una cuestión que queremos destacar. En la forma canónica que Euler llama de 2º grado *Pura*

$$axx \pm c = 0 \text{ o } axx = \mp c,$$

[25] Este libro es posterior a la *Introductio*. Euler publicó en dos volúmenes *Vollständige Anleitung zur Algebra* por la Academy of Sciences en St-Peterburg en 1770. Fellmann data el manuscrito hacia 1765/1766.

[26] La definición de función biforme, así como la clasificación de funciones y curvas de la *Introductio* se puede ver en Navarro y Puig, 2011, pp. 225-242.

c no es simplemente una cantidad positiva sino una cantidad que se puede sumar (tal vez sería más adecuado decir añadir) o restar (sustraer), además pone sumo cuidado al transformar la primera forma en la segunda pues el término c en esta segunda forma queda antepuesto por los signos – y +; de forma que si c en la primera forma estaba sumando pasa restando y si estaba restando, pasa sumando. Sin embargo, si analizamos la solución general que propone, surge la ambigüedad, pues desaparecen los signos antepuestos a c. Divide la ecuación entre a y expresa la solución de la siguiente forma: $xx = \frac{c}{a}$. Además, en la tercera forma canónica los valores asignados a las cantidades constantes ya no son necesariamente positivos, y, de hecho cuando en la resolución de problemas utiliza alguna de estas reglas, los valores de las cantidades constantes son indistintamente positivos o negativos, como se puede ver en el ejemplo que hemos utilizado en el anexo VII.

3.1.2. En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*

En la obra de Lacroix, la expresión de las cantidades negativas en el álgebra sigue generando dificultades. Lacroix utiliza en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* las letras a y b para expresar única y exclusivamente números o cantidades positivas. Lo podemos apreciar claramente si analizamos su clasificación de las ecuaciones canónicas de segundo grado, así como la expresión y construcción geométrica de sus soluciones correspondientes. En este tratado, distingue cuatro tipos distintos de ecuaciones de segundo grado completas, anteponiendo el signo – cuando quiere que una cantidad se lea como negativa. Además, como las ecuaciones están sujetas a su construcción geométrica[27], en esta clasificación el término independiente se expresa en forma de potencia cuadrada, y en la expresión de las soluciones pone sumo cuidado en los signos que se anteponen a la raíz cuadrada: si el signo de afección de a en la ecuación es positivo, o mejor si la magnitud a se añade, el valor de la raíz se añade y sustrae en este orden (± delante de la raíz), en cambio, si el signo de afección de a es negativo, o si la magnitud a se sustrae, entonces el valor de la raíz se sustrae y añade ($\mp$ delante de la raíz).

Tipo 1: $x^2 - ax = b^2$, cuya solución expresa como $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$

Tipo 2. $x^2 - ax = -b^2$, solución $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$

[27] Construcción geométrica que se puede ver en anexo VIII.

Tipo 3. $x^2 + ax = b^2$, solución $x = -\frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$

Tipo 4. $x^2 + ax = -b^2$, solución $x = -\frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$

Esta dificultad de la simbolización de las cantidades negativas en el álgebra[28] provoca, por ejemplo, que el estudio que Lacroix realiza de la ecuación de la recta en el plano sea muy minucioso. Y, concretamente, la ambigüedad con la que se trabaja todavía en esta época con las cantidades negativas en el álgebra provoca que la expresión que proporciona para la ecuación de la recta cuando la incógnita es negativa sea:

Lorsque x sera négatif, on trouvera

$$y = -ax + b,$$

Cuando *x* sea negativa, se hallará

$$y = -ax + b,$$

(Lacroix, 1807, p. 123)

3.1.3. Resumen

Los aspectos más relevantes de las cantidades negativas en el álgebra que tienen influencia en la representación gráfica de funciones mediante coordenadas cartesianas los podemos resumir de la siguiente manera.

- En los libros analizados las letras representan cualquier tipo de número. Así pues, la letra simboliza un número positivo o negativo.
- Sin embargo, cada vez que se quiere subrayar que la cantidad es negativa, la expresión lleva explícitamente antepuesto el signo –, es decir, la letra únicamente puede representar un número positivo.

3.2. Dotación de significado de las cantidades negativas en la geometría. Fijación de un origen.

Las dificultades que ocasionan las cantidades negativas en el álgebra provoca dificultades en la expresión de las ecuaciones en la geometría y el análisis. Analizaremos ahora cómo resuelven Euler y Lacroix el problema de la construcción de las magnitudes correspondientes a las cantidades negativas. Como ya hemos apuntado en diferentes ocasiones cada uno de ellos lo hará de forma distinta. Mientras que Euler

[28] En el IX hemos realizado una selección de textos de los *Elementos de álgebra* de Lacroix en los que aborda diversas cuestiones relativas a las cantidades negativas.

lo expone de manera concisa, Lacroix dedica muchas páginas hasta establecer de manera definitiva cómo y dónde se deben representar dichas cantidades, poniéndose nuevamente de manifiesto los diferentes objetivos de los dos matemáticos.

3.2.1. En la *Introductio*

El tomo II comienza con la representación de las cantidades variables que ha definido en el tomo I, y lo hace recurriendo a las magnitudes que se representan mediante segmentos, coherentemente con su naturaleza en los *Elementos* de Euclides. En los *Elementos* de Euclides magnitud se opone a número. Los números están compuestos de unidades indivisibles. Las magnitudes son divisibles y pueden ser conmensurables o inconmensurables en sí mismas. En el primer tomo, que según el propio Euler solamente contiene las cuestiones que conciernen al mero análisis, siempre utiliza el término cantidad, *quantitas*, ya que el análisis de los infinitos versa sobre cantidades variables y sus funciones. En cambio, reserva el término magnitud, *magnitudo*, para el segundo volumen en el que aplica el álgebra a la geometría. Para representar las magnitudes determinadas utiliza una recta indefinida que contiene todos sus valores determinados y fija en ella un punto que será el origen, no de las cantidades sino de las magnitudes determinadas. Así pues, cada magnitud determinada representa un valor determinado incluido en la cantidad variable.

Euler representa cada magnitud determinada mediante un segmento de la recta situado a la derecha o a la izquierda del origen, cada uno de los cuales representa un valor determinado de la cantidad variable. Fija a la derecha del origen los valores reales positivos de la cantidad variable x, a la izquierda los negativos y el valor cero en el origen. Una vez fijados, añade que es indiferente ubicar a la derecha o la izquierda los valores positivos, puesto que los negativos se representarán en el lado opuesto, poniendo de relieve la arbitrariedad en la ubicación de las magnitudes que representan los valores positivos o negativos de las cantidades variables, y que lo realmente importante es que los valores negativos se deben representar en el lado opuesto al de los positivos (de ahora en adelante nos referiremos a este aspecto como el convenio de oposición de los signos).

Los mismos criterios utilizará para justificar la representación de los valores que toma la función *y*, puesto que la función de una cantidad variable es una cantidad variable, la función puede tomar cualquier valor. De nuevo, cada magnitud representará un valor de terminado de una cantidad variable, de modo que Euler representará los valores positivos de la función mediante segmentos que elevará perpendicularmente sobre la recta en la que ha representado la variable x, y, por oposición, representará los valores negativos mediante segmentos tirados perpendicularmente por debajo de la recta indefinida.

3.2.2. En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*

Sin embargo, Lacroix dedica en este tratado muchas páginas que preparan al lector (estudiante o aprendiz de la geometría analítica del siglo XIX) para asimilar el sentido que tienen en la geometría las operaciones de suma y resta de magnitudes cuyo resultado pueda ser tanto una magnitud asociada a una cantidad positiva como a una negativa; así como la justificación de la ubicación en el plano cartesiano de las magnitudes cuyo valor sea una cantidad negativa. Destacaremos tres episodios del libro, a nuestro parecer fundamentales, que nos pueden ayudar a entender las reflexiones que necesitaron nuestros antecesores para sistematizar definitivamente el signo de las coordenadas en el plano.

1. En el primer capítulo de la trigonometría rectilínea, Lacroix establece los signos de senos y cosenos en los diferentes cuadrantes, siendo ésta la primera vez en la que necesita justificar la ubicación en el plano de las magnitudes correspondientes a cantidades negativas. Pero con la peculiaridad de que esta justificación se realiza tras la representación gráfica de los valores de senos y cosenos.

En el artículo 23 hace un resumen de los resultados que ha obtenido respecto del valor absoluto y el signo de los senos y cosenos de un ángulo cualquiera según en qué cuadrante se encuentre. Resultados que ha obtenido gracias a la generalidad de las fórmulas:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin b \sin a$$

que ha deducido previamente y que son aplicables a todas las magnitudes posibles de los arcos *AM*. Dichos resultados se ilustran en la figura 2, en la que es necesario notar que los arcos se miden a partir del punto *A* y en el sentido horario, probablemente bajo la influencia de la astronomía.

1º. Desde el punto *A* hasta el punto *A'*, donde el arco *ABA'* = π[29], los senos son

[29] En el texto original en lugar de π, escribe por error ½π.

positivos.

2º. Desde *A'* hasta el punto *A*, es decir de π a 2π, los senos son negativos.

3º. Desde el punto *A* hasta el punto *B*, donde el arco $AB = \frac{1}{2}\pi$, los cosenos son positivos.

4º. Desde el punto *B* hasta el punto *B'*, es decir de $\frac{1}{2}\pi$ a $\frac{3}{2}\pi$, los cosenos son positivos.

5º. Desde el punto *B'* hasta el punto *A*, es decir de $\frac{3}{2}\pi$ a 2π, los cosenos son negativos.

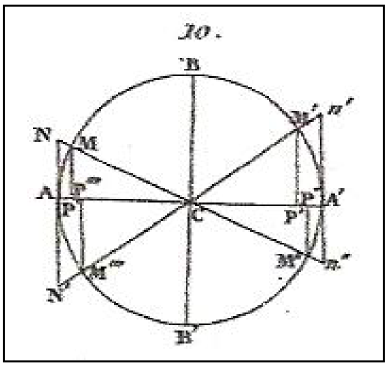


Figura 2

Los senos cambian de signo cuando están situados debajo por debajo del diámetro *AA'* y los cosenos cuando pasan de un lado al otro del punto *C*, o cuando caen a distintos lados del diámetro *BB'* perpendicular al primero.

Luego las magnitudes correspondientes a los valores negativos de los senos no se sitúan por debajo del diámetro *AA'* por convenio, sino que dichas magnitudes se interpretan como negativas porque el valor que se obtiene de la aplicación de las fórmulas para los senos de arcos entre π y 2π es negativo. Ocurre lo mismo con los valores negativos de los cosenos, su ubicación a la izquierda del punto *C* viene determinado por los arcos y, puesto que son negativos, las magnitudes que los representan se han de interpretar como negativas. Poniendo de relieve que las magnitudes correspondientes a cantidades negativas quedan ubicadas de manera natural en el lado opuesto a las magnitudes correspondientes a cantidades positivas. Conviene también indicar que los segmentos *AA*' y *BB*' de la figura 10 no representan ejes de coordenadas sino diámetros de la circunferencia. Hasta el capítulo 3 no introducirá los ejes de coordenadas ni definirá abscisa y ordenada. Pero esta figura, junto con otras, preparan al estudiante para comprender la sistematización de las coordenadas cartesianas en el plano. A pesar de que los signos en la trigonometría no coinciden con los signos de las coordenadas en la geometría analítica, hay un aspecto importante y que se mantendrá: las magnitudes correspondientes a cantidades negativas se representan en el lado opuesto a las que corresponden a cantidades positivas, siendo arbitrario, tal como ya expresó Euler, en qué lado se representen cada una de ellas.

Tras esta primera aproximación a la representación de las cantidades negativas en la geometría de Lacroix podemos concluir que la oposición de los signos en el cálculo se traducen en la geometría por la inversión de la posición de las magnitudes respecto de un segmento o un punto: diámetro *AA*', en el caso de los senos; diámetro *BB*' o punto *C*, en el caso de los cosenos. Por tanto, el signo que afecta al seno y al coseno de un ángulo se podrá deducir también a partir del cuadrante en el que caen sus correspondientes segmentos:

– En el segundo cuadrante, desde el punto *B* al punto *A*', los cosenos tiene una posición inversa a la que tienen en el primero, diferencia que en el cálculo se expresa por la oposición de los signos, si se toman positivos los cosenos de los arcos menores que $\frac{1}{2}\pi$, los cosenos de los arcos mayores que $\frac{1}{2}\pi$ se tendrán que mirar como negativos.
– Los segmentos que caen en el tercer cuadrante deben verse afectados en el cálculo por el signo −, pues el radio *CM* cae debajo del diámetro *AA'* y por tanto, ya que el coseno está contado como en el segundo cuadrante, debe verse afectado por el mismo signo que en dicho cuadrante, y como el seno tiene en el tercer cuadrante una posición inversa respecto a los dos primeros cuadrantes, en el tercer cuadrante el seno deberá expresarse anteponiendo el signo −.

2. En el capítulo 3, de la aplicación del álgebra a la geometría, Lacroix realiza varias reflexiones muy interesantes sobre las implicaciones que se derivan de tal aplicación. Destacaremos algunas de ellas por su relevancia en la dotación de significado de las cantidades negativas en la geometría en sí mismas y de sus operaciones. En la siguiente cita, Lacroix advierte que poner un problema en ecuaciones en la geometría tiene un componente añadido respecto a hacerlo en un problema numérico (aritmético), debido a que en la geometría es necesario acudir a las propiedades que cumplan las magnitudes consideradas. En este caso, hay que empezar por poner el problema en ecuaciones para obtener el valor de la incógnita y, en lugar de emplear el cálculo aritmético para evaluar la expresión, es necesario efectuar sobre las líneas conocidas operaciones gráficas correspondientes a las indicadas por el sistema de signos del álgebra.

> La escritura algebraica, tan útil para expresar las condiciones de los problemas relativos a los números, no es menos cómoda para los que pertenecen a la geometría. Estos últimos pueden ponerse en ecuación como los primeros luego que se haya logrado hallar en su enunciado la relación de las incógnitas y de los datos, pero es menester para lograrlo acudir a algunas propiedades de la especie de magnitud que se considere. (Lacroix, 1807, pp. 83-84).

Para entender a qué se está refiriendo Lacroix con las propiedades de la *especie de magnitud* analizaremos uno de los problemas que resuelve: *Dividir una línea, AB, en media y extrema razón*.

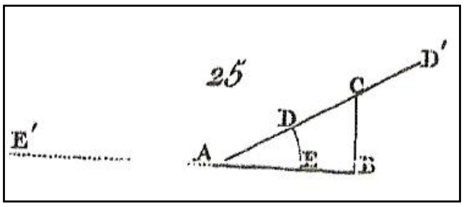


Figura 3

Resuelve este problema de dos formas: primero algebraicamente y luego geométricamente, justificando los dos resultados que ha obtenido en la primera resolución.

Primera forma: algebraicamente.

La cuestión se resuelve al obtener el punto *E* (figura 3). Designa por *a* la línea entera, por *x* el segmento desconocido y el otro segmento será *a - x*, y se tendrá *a : x :: x : a-x* , de donde se concluye $a^2 - ax = x^2$, y, resolviendo la ecuación algebraicamente se obtiene dos valores que nos conducen a dos soluciones $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2}$, de las que se deberá dar una justificación geométrica, acudiendo por una parte a la especie de la magnitud considerada y por otra a la interpretación geométrica del signo – de las raíces negativas.

Segunda forma: geométricamente

Geométricamente, estas operaciones pueden efectuarse por medio del triángulo rectángulo *ABC* (figura 3):

$$AB = a; \ BC = \frac{1}{2}a$$

por tanto, por las propiedades de la especie de la magnitud,

$AC = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2}$ sobre la línea *AC* suma y resta *BC* y obtiene:

$AD = AC - DC = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$ de donde $x = AD$

$AD' = AC + DC = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} + \frac{1}{2}a$ de donde $x = -AD'$

La recta *AD* referida en *E* sobre *AB* por medio de un arco de círculo es la solución.

Si la ecuación $a^2 - ax = x^2$ del problema se pone bajo la forma $a^2 = ax + x^2$, se obtiene la proporción $x+a : a :: a : x$ que equivale a *AD' : AB :: AB : AD* pues

$$AD' = AD + 2\,BC = AD + AB$$

De ello se infiere que la línea *AD'* también está dividida en media y extrema razón en el punto *D*, y que el segmento *DD'* es igual a la línea dada *AB*.

De este desarrollo se observa que *x* tiene dos soluciones, una positiva, a partir de la cual se obtiene el punto E, y otra negativa, cuyo resultado geométrico analiza en el artículo 77 y con el que se obtiene el punto *E'*.

> […] la última, que se halla afectada del signo – debe llevarse hacia *AE'*, más allá de *A*, respecto al punto *B*. Conclusión que es fácil de verificar pues el valor de *AD*' correspondiendo a $-x$ en la ecuación $a^2 - ax = x^2$, verifica la ecuación $a^2 + ax = x^2$, que resulta de mudar + *x* en – *x*; y esta última ecuación da la proporción
>
> $$a + x : x :: x : a,$$
>
> que equivale a
>
> $$AB + AE', \quad \text{o} \quad BE' : AE' :: AE' : AB.$$
>
> (Lacroix, 1820, p. 122)

En estas construcciones se pone de manifiesto que lo que se construye en la resolución de la ecuación de segundo grado es la magnitud de las raíces. En los artículos siguientes, del 74 al 78, interpreta geométricamente el signo – de las raíces negativas.

> En la aplicación del álgebra a la geometría el signo −, se interpreta en general como se hace con respecto a los números, invirtiendo de cierto modo el enunciado de la cuestión, o tomando en ella las líneas que son afectadas de tal signo en un sentido contrario a aquel en que se las había supuesto desde luego.

> Antes de pasar adelante debemos recordar que las cantidades negativas tienen su origen en aquellas sustracciones que no pueden efectuarse en el orden en que se hallan indicadas, porque la cantidad que se ha de restar es mayor que la de quien se ha de restar. Por esta circunstancia se reconoce que hay un error en el enunciado de aquella cuestión, o a lo menos en su aplicación al caso particular que se tiene en consideración; y quitando este error, esto es, modificando el enunciado de la cuestión, de suerte que se haga posible la sustracción que antes no podrá ejecutarse, se deberá tener un resultado positivo; mas para ciertas cuestiones; aquellas por ejemplo que conducen a ecuaciones de primer grado, no hay necesidad de este trabajo. El mismo signo del resultado indica la inversión de que es susceptible el enunciado, y los valores negativos, empleados del modo que expresan las reglas establecidas para efectuar las operaciones sobre las cantidades afectadas del signo −, satisfacen también a las cuestiones como los que son positivos; esta es la razón por la cual se ha cambiado la denominación *raíces falsas*, que en otro tiempo daban los analistas a las raíces negativas de las ecuaciones.
>
> Es también por la sustracción por quien debe explicarse, sobre las figuras geométricas, los valores negativos que el álgebra da a ciertas líneas; para sustraer una línea de otra basta llevar la primera sobre la segunda, partiendo desde uno de los extremos de la última; pero sobre esta operación gráfica hay que hacer algunas observaciones nacidas del modo con que las líneas se describen. (Lacroix, 1807, pp. 99-100)

3. Esta cita nos sumerge en el último episodio que queremos analizar: ¿cómo describir las líneas en la geometría para que la sustracción de las mismas explique el valor negativo que el álgebra otorga a ciertas líneas[30]?

Para contestar a esta cuestión Lacroix explica cómo se debe actuar en la geometría para restar dos magnitudes, diferenciando los dos casos posibles y empezando, por supuesto, por la sustracción cuyo resultado es un valor positivo, para terminar explicando la sustracción cuyo resultado es un valor negativo, haciendo uso del caso anterior y recurriendo de nuevo a que la oposición de los signos en el álgebra se traduce en la inversión de la posición de segmentos en la geometría. Estas sustracciones las explica mediante la figura 4.

[30] El término líneas utilizado en la época se corresponde con el de segmento.

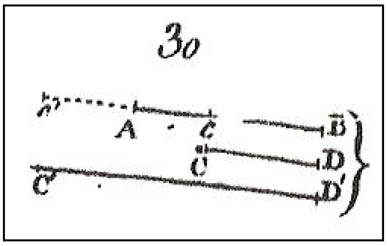


Figura 4

Sea *CD* la línea que debe sustraerse de *AB*, como *CD* < *AB* basta llevar *CD* desde *B* hasta *c*, su diferencia (valor positivo) está colocada a la derecha de *A*.

Si se tiene que restar *C'D'* > *AB*, vemos que partiendo de *B*, la diferencia de las dos rectas propuestas es la línea *Ac'*, que recae a la izquierda del punto *A* en la prolongación de la recta *AB*. Esto es, en el lado opuesto al resultado *Ac* de la primera operación, a este cambio de posición es al que corresponde el signo −.

Lacroix justifica esta construcción de la siguiente manera: las líneas se emplean, en general, para señalar distancias a un punto fijo, en este caso *A*, así pues si a la línea *AB* (distancia de *A* a *B*) hay que restarle la línea *CD* o *C'D'*, ésta debe hacerse desde el extremo opuesto *B* y en sentido inverso (hacia el lado en que las líneas disminuyen). La continuidad de las líneas y la posibilidad de prolongarlas indefinidamente en los dos sentidos es lo que garantiza que la sustracción se pueda realizar, aunque la cantidad que haya que sustraer sea la mayor de las dos.

Es decir, siempre que se trate de distancias referidas a un punto, y contadas sobre una línea o sobre líneas paralelas, aquellas que son afectadas del signo – deben tomarse en sentido opuesto a aquellas que están afectadas del signo +. La continuidad de las líneas por una parte y la prolongación indefinida de las mismas, garantiza que siempre se pueda realizar la sustracción de dos líneas cualesquiera en la geometría. Además, a partir de la resolución geométrica de estas cuestiones, la consideración que los antiguos analistas hacían de las raíces negativas dejan de tener sentido, con lo cual la denominación de *raíces falsas* a las raíces negativas desaparece.

En el momento en el que la geometría dota de sentido a las magnitudes correspondientes a cantidades negativas, el valor negativo que otorga el álgebra a algunas líneas queda interpretado; lo que provoca, a su vez, que el álgebra acepte y reconozca la validez de las raíces negativas. Todas estas cuestiones conducirán al establecimiento de los signos de las abscisas y ordenadas en el plano.

De la aplicación del álgebra a la geometría surge, en la geometría, la necesidad de dotar de sentido a las magnitudes. Lo cual, por una parte favorece la sistematización de las coordenadas en el plano y por otra, proporciona al algebra las consideraciones necesarias para aceptar las cantidades negativas como soluciones válidas de las ecuaciones, sobre todo de las ecuaciones de 2º grado, que como hemos visto a lo largo de este apartado se supeditaban a sus construcciones geométricas.

3.2.3. Resumen

Aunque hay muchas cuestiones que hacen que la sistematización de las coordenadas sea posible, hemos querido destacar en este apartado que la dotación de significado de la negatividad se convierte en una cuestión primordial en el proceso de la sistematización de las coordenadas. Hubiera sido imposible sistematizar las coordenadas sin tener en cuenta tanto los valores positivos como los negativos, lo que apremiaba a la geometría a dotar de significado a las magnitudes asociadas a cantidades negativas.

En resumen, para representar cantidades en la geometría, Euler utiliza magnitudes que representa como segmentos en una recta indefinida y que orienta arbitrariamente respecto de un punto previamente fijado, el origen. La arbitrariedad de las cantidades en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* se pone de manifiesto en la representación que Lacroix hace de senos y cosenos: la oposición de los signos en el cálculo se traduce en la geometría por la inversión de la posición de las magnitudes respecto de un segmento o un punto. Por tanto, la dotación de significado de las cantidades negativas en la geometría hace imprescindible la fijación de un origen.

3.3. FIJACIÓN DE UN ORIGEN DE COORDENADAS.

La representación en geometría de cantidades negativas pasa por la fijación de un origen: el origen de las coordenadas. ¿Se realiza de la misma manera en los dos autores? ¿Hay diferencias sustanciales? Éstas son las preguntas a las que pretendemos dar algunas respuestas en este apartado.

En una visión global encontramos la primera diferencia basada en los diferentes objetivos de sus obras. Euler inicia la sistematización de las coordenadas fijando el origen, que en su caso será únicamente origen de las abscisas. Por su parte, Lacroix definirá las coordenadas después de utilizarlas en la resolución de varios problemas sin mostrar la necesidad de justificar la fijación del origen de coordenadas.

3.3.1. En la *Introductio*

Euler dedica el segundo tomo de la *Introductio* a la Teoría general de Curvas, y en el primer capítulo introduce las coordenadas con el fin de utilizarlas para asociar a cada función de x, definida en el primer volumen, una línea recta o curva que dependerá de la naturaleza de la función.

> Así cada función de x representada de esta manera en la geometría, dará una línea recta o curva, cuya naturaleza dependerá de la función. Euler (1797, t. II, p. 3)[31]

Esta finalidad influirá de manera determinante en la sistematización que Euler realizará de las coordenadas. El concepto de función de Euler depende en gran medida de las cantidades variables y éstas van a condicionar la manera de construir las coordenadas. Para realizar el trazado de la curva asociada a una función debe representar las cantidades variables y no tiene más remedio que recurrir a las magnitudes, de tal manera que cada magnitud determinada representa un valor determinado incluido en la cantidad variable. La función que quiere representar es función de x, que es una magnitud. Una recta indefinida, *RS* (figura 5), representa de forma apropiada una cantidad variable porque contiene una infinidad de segmentos que se pueden separar de ella, de la misma manera que la cantidad variable contiene todos los valores determinados. Así, los segmentos separados de la recta representan adecuadamente valores determinados. Para que la correspondencia sea biunívoca hace falta fijar un punto, el punto *A*, y considerar sólo los segmentos que tienen ese punto como uno de sus extremos. El punto *A* será considerado como el origen no de las cantidades determinadas sino de las magnitudes determinadas.

La fijación del origen junto con el carácter indefinido de la recta *RS* a ambos lados del origen dota a la recta *RS* de orden. Los segmentos *AP* situados a la derecha del punto *A* representan los valores positivos determinados de x, los segmentos *Ap* situados a la izquierda representan los valores determinados negativos, aunque Euler nos recuerda que es indiferente ubicar a la derecha o la izquierda los valores positivos, puesto que los negativos se representarán en el lado opuesto. Además, como todos los segmentos tienen en *A* uno de sus extremos, cuanto más se aleja el otro extremo de *A*, mayor será el valor de la magnitud que representa; cuanto más se aleja el punto *P* hacia la derecha, más grande es el valor de x representado por el segmento *AP*, y cuanto más se aleja el

[31] Las traducciones del tomo II las hemos realizado para esta memoria.

punto *p* hacia la izquierda, más disminuye el valor de x[32] representado por el intervalo *Ap*.

Si los dos extremos coinciden, es decir *P* cae sobre *A*, el valor del segmento deviene nulo y por tanto representará el valor 0 de *x*. Es decir, el origen de las magnitudes, al dotar de sentido a las magnitudes, representa el valor 0 de la variable *x*.

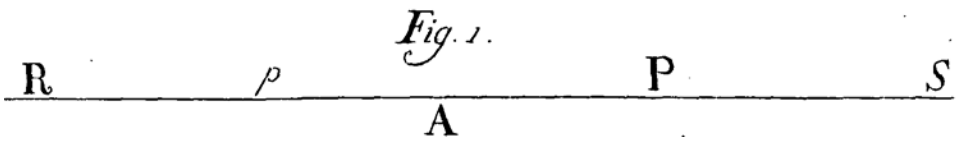


Figura 5

> 1. Como una cantidad variable es una cantidad que se considera en general, que contiene todos los valores determinados, entonces una recta indefinida, como *RS*, será muy adecuada para representar en geometría una cantidad de esa naturaleza. En efecto, ya que podemos tomar sobre una recta indefinida una parte cualquiera que tenga un valor determinado, esta línea presenta al espíritu la misma idea de magnitud, que la cantidad variable. Por tanto, hay que fijar ante todo en una línea indefinida *RS* un punto *A*, que será considerado el origen de las magnitudes determinadas que se separarán de ella; así, una porción determinada *AP* representará un valor determinado comprendido en la cantidad variable. (Euler, 1797, t. II, p.1)
>
> 3. Ahora bien, como la recta indefinida *RS* se extiende hasta el infinito a una parte y otra del punto *A*, se podrá cortar también de una y otra parte todos los valores de *x*. Más, si tomamos los valores positivos de *x*, siguiendo la recta desde el punto *A*, los intervalos *Ap* situados a la izquierda representarán los valores negativos de *x*. En efecto, puesto que (cuanto) más se aleja el punto *P* del punto *A* hacia la derecha, más grande es el valor de *x* representado por el intervalo *AP*; recíprocamente, cuanto más se aleja el punto *P* hacia la izquierda, más disminuye el valor de *x*; y, si *P* cae sobre *A*, el valor de *x* deviene=0. Por esto, si el punto *P* está más apartado hacia la izquierda, los valores de *x* devienen más pequeños que cero, es decir, serán negativos, y los intervalos *Ap* tomados a la izquierda desde el punto *A*, representaran los valores negativos de *x*, si los intervalos *AP*, situados a la derecha se considera representar (que representan) los valores positivos. Por lo demás, es

[32] En este párrafo Euler utiliza la letra *x* para referirse a una cantidad numérico-algebraica negativa sin necesidad de anteponer el signo –, que además asocia geométricamente a una magnitud considerada como un segmento orientado.

> indiferente tomar del lado que se quiera los valores positivos, pues el lado opuesto contendrá siempre los valores negativos. (Euler, 1797, t. II, p. 2)

3.3.2. En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*

Lacroix, tal como hemos apuntado anteriormente, formaliza los conceptos relacionados con las coordenadas después de utilizarlos en la resolución de algunos problemas. Resuelve el siguiente problema para poner de manifiesto cómo interpretar geométricamente los signos de las soluciones de una misma ecuación:

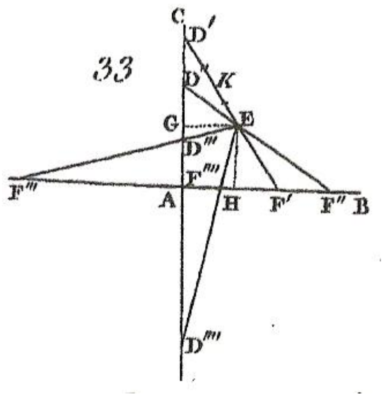


Figura 6

> Por un punto *E*, fig. 33, colocado como se quiera respecto de dos rectas *AB* y *AC*, perpendiculares entre sí, tirar una recta de modo que la parte *D'F'* de esta recta, interceptada entre las dos rectas propuestas, sea de una magnitud dada *m*.(Lacroix, 1807, p. 104)

No nos interesa, en esta ocasión, analizar la resolución del problema[33], lo que queremos analizar son los conceptos que aparecen en el enunciado del problema y en la figura en sí misma.

Aunque Lacroix todavía no ha definido abscisa ni ordenada, ni tampoco origen ni ejes de coordenadas; bien podemos observar en la figura 6 que las rectas *AB* y *AC* desempeñan el papel de ejes de coordenadas, ejes de coordenadas perpendiculares por el punto *A*, que a su vez hace de origen de coordenadas.

Aunque la posición del punto *E* respecto de las rectas *AB* y *AC* es arbitraria, *E* es un punto dado y por tanto las líneas *GE* y *HE* tiradas paralelamente a las líneas *AB* y *AC* se suponen conocidas (desempeñan el papel de las coordenadas del punto *E* respecto del sistema de coordenadas elegido). Parece que lo único que queda es formalizar los

[33] En el anexo X sobre el método cartesiano en Lacroix se puede consultar el análisis completo del problema.

conceptos. Pero previamente Lacroix hace una reflexión sobre los diferentes usos del Álgebra, en la que hace referencia a Descartes, destacando que fue el primero en aplicar el Álgebra a la teoría de las líneas en general:

> No solo sirve el Álgebra para hallar la magnitud de las líneas y de las partes de la extensión, comparadas las una a las otras, sino que da también el medio de determinar las figuras que forman estas líneas, y en general las formas del espacio. Notando Descartes, el primero, que estas figuras y estas formas establecen relaciones de magnitud entre las líneas, llegó a aplicar el Álgebra a la teoría de las líneas en general; y por este descubrimiento cambiaron de aspecto las Matemáticas. (Lacroix, 1807, p. 115).

Lacroix realizará varios intentos de desligar las coordenadas de la curva, pero podemos afirmar que Lacroix sistematiza las coordenadas con una finalidad similar a la de Euler, asociar cada curva con su ecuación y viceversa, aunque ahora desde el punto de vista de la geometría analítica, y, por ello, no utilizará el concepto de función sino el de curva como lugar geométrico, si bien Lacroix no utiliza esta terminología.

Podemos apreciar, a partir de la figura 7 y el texto que la acompaña, que efectivamente Lacroix comienza el estudio de las coordenadas a partir de los puntos de una curva.

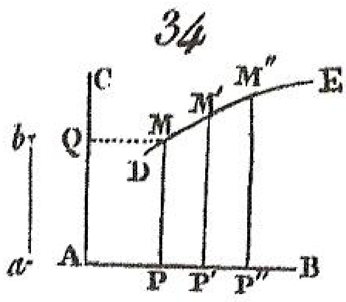


Figura 7

> Si se concibe que desde todos los puntos de una línea cualquiera *DE*, se hayan bajado perpendiculares *PM, P'M', P''M''*, etc. sobre una línea recta *AB*, dada de posición, y que partiendo desde un punto *A*, tomado a arbitrio sobre esta línea, se hayan medido las distancias *AP, AP', AP''*, etc.; cada una de estas distancias, y la perpendicular que le corresponde, estarán ligadas entre sí, de modo que la una se concluirá precisamente de la otra. En efecto, cuando esté fijada la magnitud de *AP*, el encuentro de la curva *DE* con la perpendicular, levantada por el punto *P* sobre la línea *AB*, dará la magnitud *PM*; y cuando se tenga esta magnitud, que supondremos representada por *ab*, se obtendrá *AP* con solo tomar sobre *AC*, perpendicular a *AB*,

> una parte *AQ* = *ab*, y tirar por *Q* la recta *QM* paralela a *AB*, la cual encontrará a la líneas *DE* en un punto *M*, para cuyo punto deberá tenerse *PM* = *ab*.
>
> Nada obsta imaginar que las líneas *AP*, *PM* estén referidas a una línea común tomada por unidad, y que bajo este aspecto ellas se hallen representadas por números o por letras. Si la relación que hay entre *AP* y *PM* entre *AP'* y *P'M'* etc. puede ser expresada por una ecuación algebraica, esta ecuación caracterizará la línea *DE*, y podrá servir para hacer conocer sucesivamente todos sus puntos; esto lo manifestaremos en dos ejemplos muy simples. (Lacroix, 1807, pp. 115-116)

Lacroix fija (figura 7) el punto *A* sobre la semirrecta horizontal *AB*, que es arbitrario y se concibe, al igual que en Euler, como el origen de las magnitudes *AP*. Las cuales se representan por números o letras que corresponden a las distancias de dichas magnitudes. Una vez fijado el punto *A* como origen de abscisas, aunque de momento no lo define como tal, lo utiliza para representar sobre la semirrecta *AC* las magnitudes *PM*, representadas por *ab*, que levanta perpendicularmente a la semirrecta *AB* por el punto *P*, convirtiendo al punto *A* en el origen de coordenadas.

Observamos un cambio sustancial respecto al texto de Euler, pues el objetivo ahora de las coordenadas es mucho más concreto y preciso, ya que determinan la posición de un punto en el plano respecto de dos rectas, con lo cual el punto intenta desligarse de la curva a la que pertenece. La posición del punto se obtiene o se construye por sí misma, sin necesidad de estar vinculado a una ecuación o a una línea. Aunque, si nos fijamos en la figura 34, el punto no es un punto aislado y cualquiera del plano, sino un punto que todavía pertenece a una curva determinada.

Lacroix define abscisa, ordenada, ejes y origen de coordenadas, dejando el origen de coordenadas para la última de las definiciones, pues no sólo pretende dar la definición sino, lo que parece más importante, obtener sus coordenadas.

> Es menester observar que para los puntos situados sobre la línea *AB*, la distancia *AQ* o *PM* es nula, y que por consiguiente si se la representa por *y*, se tendrá para todos estos puntos $y = 0$; por la misma razón se sacará *QM* o *AP*, o $x = 0$, para todos aquellos que se hallan en el eje *AC*; y últimamente para el punto *A*, que se llama el *origen de las coordenadas*, se deberá tener al mismo tiempo
>
> $x = 0, \quad y = 0$. (Lacroix, 1807, p. 120)

3.3.3. Resumen

La sistematización de las coordenadas en Euler comienza fijando un punto como origen de las magnitudes. Dicho origen que empieza siendo exclusivamente origen de abscisas, se convierte en origen de coordenadas en la geometría analítica de Lacroix, en la que ya no es tan primordial la necesidad de justificar la fijación del origen como la justificación del valor de sus coordenadas. En Euler, el origen de abscisas representa el valor nulo de la variable, $x = 0$, y, en Lacroix, el origen de abscisas se convierte en origen de coordenadas que se representa por un par de valores $x = 0$ e $y = 0$ tomados de manera independiente y desligados de la curva.

En ambos casos, el origen se concibe como un punto arbitrario pero imprescindible en la construcción de las coordenadas por segmentos, pues el origen tiene que ser uno de los extremos de los segmentos, cada uno de los cuales se convertirá primero en abscisa, las abscisas de Euler, y posteriormente, en Lacroix, la abscisa se convertirá en la longitud de dichos segmentos.

3.4. El significado de la idea de abscisa.

Una vez fijado el origen de coordenadas y siguiendo la exposición de Euler, pasamos a analizar el establecimiento de las abscisas, tanto su construcción como su justificación. Al igual que en la fijación del origen, el concepto de abscisa adquiere mayor importancia en su justificación en Euler que en Lacroix. Mientras que en Euler es un concepto claro, en Lacroix la idea de abscisa recorre en cierta manera su proceso histórico, pues la postura de Lacroix frente a la manera de enseñar es muy cercana a una de las corrientes actuales de enseñar matemáticas a través de la historia, es decir, haciendo que los estudiantes atraviesen las distintas fases por la que han pasado algunos conceptos a lo largo de la historia para favorecer la superación del propio estudiante de los obstáculos que hicieron posible el progreso de las matemáticas en general.

3.4.1. En la *Introductio*

Euler concibe el origen en la *Introductio* como un punto arbitrario pero imprescindible en la construcción de las coordenadas por segmentos. De hecho en las primeras páginas del tomo II define abscisa como un intervalo de la recta *RS* que representa un valor determinado de la cantidad variable, pero mientras que la definición de cantidad variable del tomo I incluye los números imaginarios, ahora la recta indefinida *RS* sólo puede representar los valores reales de la cantidad variable. Tal vez por ello, Euler usa la letra *z* en el tomo I para designar la cantidad variable, y *x* en el tomo II para designar los valores reales de la cantidad variable.

> 2. Sea pues *x* una cantidad variable, representada por la recta indefinida *RS*, está claro que todos los valores determinados de *x*, siempre que sean reales, pueden ser expresados por porciones tomadas en la línea *RS*. Por ejemplo, si el punto *P* cae en el punto *A*, el intervalo *AP*, haciéndose nulo, representará el valor de $x = 0$, pero mientras más se aleje el punto *P* del punto *A*, más grande se hará el valor determinado de *x* representado por el intervalo *AP*.
>
> Llamamos a estos intervalos *AP*, ABSCISA.
>
> Así, las abscisas representan los valores determinados de la variable *x*. (Euler, 1797, t. II, pp.1-2)

Es decir, define abscisa como un intervalo orientado de la recta, medido desde el origen, el cual representa un valor determinado de la cantidad variable. Definición de la que es necesario subrayar que la abscisa no es el punto en la recta, ni la longitud del intervalo sino que la abscisa es el intervalo, el segmento *AP*, que, como ya habíamos señalado anteriormente, tiene como uno de sus extremos el origen de abscisas. Euler fija arbitrariamente a la derecha del origen los valores reales positivos de la variable *x*, a la izquierda los valores negativos (que define, como se puede ver en el artículo 3 que hemos incluido en el apartado 4.3.1., cómo los valores que devienen más pequeños que cero) y el valor cero en el origen. En definitiva, dota a las abscisas de magnitud y sentido y establece el orden en la recta indefinida (figura 5): cuanto más se aleja el punto *P* hacia la derecha, más grande es el valor de *x* representado por la abscisa *AP*; cuanto más se aleja el punto *p* hacia la izquierda, más disminuye el valor de *x* representado por la abscisa *Ap*.

3.4.2. En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*

El concepto de abscisa va a experimentar un cambio sustancial en el texto de Lacroix, la abscisa dejará de ser un intervalo, el segmento *AP*, y se convertirá en la longitud o distancia de un segmento orientado.

Al igual que ocurre con el origen de coordenadas, la definición de abscisa en Lacroix se formalizará tras la resolución de dos problemas: la obtención de la ecuación de la recta que pasa por el origen y la ecuación de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas. En los dos ejemplos utilizará magnitudes para obtener la ecuación buscada, sin utilizar en ningún momento los términos abscisa, ordenada o coordenadas. Aunque de hecho utiliza lo que hemos denominado magnitudes coordenadas y concretamente magnitudes coordenadas ortogonales. Pero simultáneamente considera los segmentos como distancias, que tomados o comparados con un segmento unidad arbitrario, se pueden representar por números o letras. El siguiente fragmento está referido a la figura 7.

> Si se concibe que desde todos los puntos de una línea cualquiera *DE*, se hayan bajado perpendiculares *PM*, *P'M'*, *P''M''*, etc. sobre una línea recta *AB*, dada de posición, y que partiendo desde un punto *A*, tomado a arbitrio sobre esta línea, se hayan medido las distancias *AP*, *AP'*, *AP''*, etc.; cada una de estas distancias, y la perpendicular que le corresponde, estarán ligadas entre sí, de modo que la una se concluirá precisamente de la otra. En efecto, cuando esté fijada la magnitud de *AP*, el encuentro de la curva *DE* con la perpendicular, levantada por el punto *P* sobre la línea *AB*, dará la magnitud *PM*; y cuando se tenga esta magnitud, que supondremos representada por *ab*, se obtendrá *AP* con solo tomar sobre *AC*, perpendicular a *AB*, una parte *AQ* = *ab*, y tirar por *Q* la recta *QM* paralela a *AB*, la cual encontrará a la líneas *DE* en un punto *M*, para cuyo punto deberá tenerse *PM* = *ab*.
>
> Nada obsta imaginar que las líneas *AP*, *PM* estén referidas a una línea común tomada por unidad, y que bajo este aspecto ellas se hallen representadas por números o por letras. Si la relación que hay entre *AP* y *PM* entre *AP'* y *P'M'* etc. puede ser expresada por una ecuación algebraica, esta ecuación caracterizará la línea *DE*, y podrá servir para hacer conocer sucesivamente todos sus puntos; esto lo manifestaremos en dos ejemplos muy simples. (Lacroix, 1807, pp. 115-116)

En ambos casos la ecuación se obtiene por la consideración de propiedades geométricas.

1. *Ecuación de la recta que pasa por el origen*

La relación de todas las distancias *AP* con las perpendiculares *PM* consiste en la razón constante que cada una de las primeras tiene con las de las segundas que le corresponden, y, si esta relación se designa por a y a cada punto de la recta *AE* la distancia del pie de la perpendicular al punto *A*, cualquiera que ella sea, por *x* y la perpendicular que le corresponda por *y*, se tendrá $y = ax$. Ecuación de la que Lacroix dice que contiene dos incógnitas *x*, *y*, y que solo puede dar a conocer el valor de una, y esto sucederá cuando el valor de la otra se haya fijado arbitrariamente: si se asigna a *x* un valor cualquiera *AP*, se deducirá para *y* el valor correspondiente *PM*.

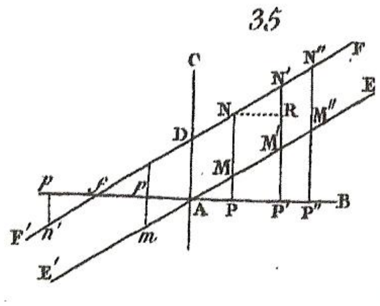


Figura 8

De esta primera parte del problema podemos realizar algunas observaciones importantes:

1ª. Aunque en ningún momento aparecen los términos de magnitud ni de segmento, parece obvio que el uso que hace de los segmentos AP y PM es el de magnitud, que, para la asignación de valores, transforma en distancias.

2ª. Todas las cantidades que aparecen en la obtención de la ecuación son positivas, también la constante a, pues todas ellas están situadas en el primer cuadrante (al que Lacroix no denomina cuadrante sino ángulo).

3ª. Para finalizar, argumenta la aplicación de la ecuación como generadora de puntos de la recta, estableciendo una correspondencia entre la recta y su ecuación.

Para que la ecuación sea válida en toda la extensión de la recta, es decir, sea también válida para valores simultáneamente negativos de las incógnitas, Lacroix prolonga la semirrecta *AE*. En esta prolongación se inicia la necesidad de representar coordenadas negativas, aunque los conceptos todavía no estén formalizados.

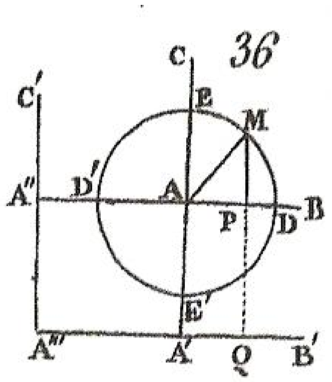
> La línea *AE* no se termina en el punto *A*; para abrazar toda la extensión de dicha línea se debe concebir prolongada hacia *AE*' debajo de la línea *AB*, y a la izquierda de la línea *AC*. Esta última parte está también comprendida en la ecuación $y = ax$; porque se puede dar a *x* en esta ecuación valores negativos, y expresando estos valores las distancias a la línea *AC*, deben de ser tomados del lado opuesto a aquel en que se han llevado los valores positivos: ellos darán pues puntos tales como *p*, colocados al otro lado del punto *A*. Pero los valores correspondientes de *y* son también negativos, y por lo mismo deben tomarse del lado opuesto a aquel en que se han llevado los valores positivos, esto es, debajo de *AB*, como *pm*; pero además es claro que si se tomase *Ap* igual a *AP*, *pm* seria igual a *PM*; de este modo podíamos concluir los puntos de la prolongación *AE*' de la recta *AE*. (Lacroix, 1807, p. 117)

De esta forma la ecuación comprende la recta en toda su extensión. Al dar valores negativos a la incógnita x, se obtienen valores de y que también son negativos. En ambos casos los valores son negativos y, puesto que expresan las distancias a las líneas AC y AB respectivamente (figura 8), se deben tomar del lado opuesto al que se han llevado los valores positivos, es decir, los valores negativos de y por debajo de AB y los de x a la izquierda del punto A. Esto es, Lacroix dota a las magnitudes (distancias) de sentido para que la expresión de valores negativos adquiera significado en la geometría. Si las distancias Ap y AP, y pm y PM son respectivamente iguales pero los valores de las incógnitas x e y correspondientes son opuestos, las distancias (magnitudes) que hay que representar son de la misma longitud, y para que quede evidenciado que los valores que expresan son opuestos habrá que tomarlas en lados opuestos.

2. *Ecuación de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas*

Lacroix define circunferencia como lugar geométrico de la siguiente manera:

> Lo que distingue los puntos de la circunferencia de los demás del plano es estar todos a una distancia del centro *A* que es igual a *AD*; y por lo mismo en cualquier sitio que se tome el punto *M* sobre esta curva, las rectas *AP* y *PM* serán los catetos de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa *AM* será igual a *AD*. (Lacroix, 1807, p. 117)



Lacroix utiliza las propiedades de las magnitudes para obtener la ecuación de la circunferencia:

haciendo $AP = x$, $PM = y$, $AD = r$

obtiene $x^2 + y^2 = r^2$,

y de ella $y = \sqrt{r^2 - x^2}$;

ecuación, por la que dando, según Lacroix, el valor de x o *AP*, se tendrá y o *PM*, con la ayuda del cálculo, y sin necesidad de construir la figura. De la misma manera que en la ecuación de la recta, obtiene la ecuación de la circunferencia a partir de los valores del primer cuadrante, es decir, los valores $AP = x$, $PM = y$ y $AD = r$ representan exclusivamente cantidades positivas.

Desde el rigor moderno, ya no sabemos precisar si para Lacroix *AP* es un segmento, su longitud o la incógnita de la ecuación. No podemos concretar si es el valor de la incógnita, si expresa el valor de la incógnita o es una magnitud; tal vez esta confusión esté provocada por el ansia de organizar el conocimiento, recorriendo la historia desde la obtención de la ecuación de una curva como lugar geométrico similar a Descartes, hasta la sistematización de las coordenadas.

A pesar de ello, una vez que ha obtenido la ecuación ya no necesita construir la figura para obtener más puntos de la circunferencia, y, como en la ecuación determinada por la construcción geométrica los valores de x e y pasan a ser incógnitas, es decir, dejan de estar limitados por las distancias que expresan (o representan), pueden tomar valores negativos a partir de los cuales se puede dibujar la circunferencia en el resto de los cuadrantes haciendo uso de los resultados obtenidos en la ecuación.

> Se concibe fácilmente cómo pueden sacarse de la misma ecuación los valores de las líneas representadas por *PM* para todos los puntos de la *AB*, comprendidos entre *A* y *D*. La ecuación $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ prueba del mismo modo que la descripción geométrica de la circunferencia del círculo, que esta curva no debe extenderse más allá del punto *D*; porque para tomar el punto *P* más allá de *D* sería necesario suponer $x > AD$ o $> r$, y en este caso el valor de *y* sería imaginario.
>
> Aunque no se haya considerado más que el cuadrante *DE*, los otros tres que completan la circunferencia se halla comprendidos en la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, porque la ordenada *y* tiene dos valores para cada uno de los de *x*, a saber,
>
> $$\sqrt{r^2 - x^2} \text{ y } -\sqrt{r^2 - x^2}$$
>
> el segundo debe llevarse del lado opuesto al que se lleve el primero, y da por lo mismo todos los puntos del cuadrante *DE’*. Pero también puede darse a *x* valores negativos que deben llevarse desde *A* a *D’*, ya que los valores positivos fueron llevados desde *A* a *D*; y a cada uno de estos valores corresponden dos valores de *y*: el valor positivo dará los puntos del cuadrante *D’E*, y el valor negativo los puntos del cuadrante *D’E’*. (Lacroix, 1807, p. 118)

Aunque el tema puede parecer recurrente, cada vez que debe llevar a la figura un valor negativo, ya sea una cantidad de x o de y, necesita volver a explicar dónde hay que situarlo y por qué. Esta reiteración nos sugiere, por una parte, que estamos delante de un libro de texto de iniciación en la geometría analítica, pero también que la representación de las cantidades negativas seguía configurando un problema en la época de Lacroix.

A partir de estos dos ejemplos, y volviendo a la figura 34, Lacroix define abscisa, ordenada, ejes y origen de coordenadas. La manera de representar tanto la recta como la circunferencia tiene como objetivo determinar la posición de un punto cualquiera por medio de sus coordenadas y, coherentemente, Lacroix define simultánea y conjuntamente abscisa y ordenada como coordenadas determinadas por la dirección de unos ejes de coordenadas previamente fijado.

> Las líneas *AP* y *AQ*, o sus iguales *PM* y *QM*, se llaman *coordenadas*. Comúnmente se emplea la palabra *abscisa* para designar la coordenada que se supone conocida, y a la otra se le da el nombre de *ordenada*. Así en los ejemplos anteriores, en que siempre hemos expresado las líneas *PM* por medio de las *AP*, las tales *PM* expresaban las ordenadas, y las *AP* las abscisas. Las líneas *AB* y *AC*, que determinan la dirección de las coordenadas, se llaman los ejes de las *coordenadas*. (Lacroix, 1807, p. 119)

El objetivo de Lacroix es determinar la posición de un punto en el plano respecto de dos rectas. Posición que se pretende obtener sin necesidad de su vinculación a una ecuación o a una línea. Por ello Lacroix afirma que la determinación de un punto se produce cuando se conocen las distancias de las coordenadas. Coordenadas que define como segmentos, de longitud y dirección determinadas, obtenidos por la intersección de líneas paralelas a las rectas que conforman los ejes de coordenadas. Luego parece que las coordenadas son los segmentos orientados cuyas longitudes determinan la posición de puntos en el plano.

Pero el reiterado intento de desligar las coordenadas de un punto se desvanece, al menos de momento, con la concreción de las coordenadas en abscisas y ordenadas. Lacroix define *abscisa* como la palabra que se emplea comúnmente para designar la coordenada que se supone conocida y *ordenada* como el nombre que se le da a la otra coordenada. Las coordenadas no necesitan para la determinación de un punto, si nos fijamos en la primera parte del texto, de la línea a la que pertenece dicho punto. Pero, si atendemos a las definiciones de abscisa y ordenada, observamos que el punto sigue ligado a los valores de las incógnitas de la ecuación que se obtiene a partir de la línea a la que pertenece el punto.

También es importante observar en la definición de coordenadas los problemas que siguen generando la representación de las cantidades negativas, puesto que las líneas *AB* y *AC* no son rectas, sino semirrectas de origen *A* y las coordenadas se definen a partir y para el primer cuadrante, y solamente después generalizará Lacroix estas definiciones para valores tanto positivos como negativos.

Profundizando un poco en el concepto de abscisa observamos que:

1º. La elección del segmento en la dirección horizontal para expresar la abscisa está provocado precisamente por la manera de ligar entre sí las coordenadas: en los ejemplos que ha utilizado previamente las líneas *PM*, que expresan las ordenadas, se obtienen a partir de las líneas *AP*, que expresan las abscisas.

2º. El término abscisa con estas definiciones puede resultar ambiguo, pues no queda nada claro si la abscisa es la coordenada *AP* entendida como una magnitud o como el valor que expresa, es decir especificada como el segmento o como la distancia (o longitud) del segmento.

3º. La definición de abscisa, entendida de una u otra manera, se ha constituido en el primer cuadrante. Es decir se ha formalizado para valores positivos y es necesario explicar cómo se establece la generalización del concepto para que abrace también a los valores negativos.

Cómo establece Lacroix definitivamente las coordenadas para cualquier cuadrante lo examinaremos en los apartados siguientes, tras analizar paulatinamente los conceptos siguiendo el orden en la exposición de Euler.

3.5. El paso de la idea de aplicada a la idea de ordenada.

El paso de la idea de aplicada de Euler a la idea de ordenada de Lacroix vendrá determinado por dos cuestiones fundamentales: el establecimiento de un eje propio y el avance de la aplicada como magnitud a la ordenada como longitud de la magnitud.

3.5.1. En la *Introductio*

Euler sistematiza las coordenadas para representar y estudiar las propiedades de las funciones. En el tomo I define función de una cantidad variable, *z*, mientras que en el del tomo II, explica cómo representar geométricamente una función cualquiera de *x* (real) a la que llama *y*. En el primer tomo justificó que *y* también puede tomar cualquier valor determinado, ahora sólo se tiene que ocupar de explicar cómo representarlo cuando dicho valor es real.

En la teoría de curvas de Euler, el valor de la función es una cantidad variable ligada a la variable *x*, de tal manera que no precisa para su representación de ningún eje. Para cada valor determinado de *x*, la función *y* toma un valor determinado que se representa levantando una perpendicular sobre la recta de abscisas por el extremo de la abscisa *AP*, que representa al valor dado de *x*, cuya longitud es igual al valor correspondiente de *y*. Euler llama *aplicadas* a cada una de estas perpendiculares. Aunque en la época se utiliza el término de ordenada, Euler utiliza el de aplicada.

> Y se ha dado el nombre de APLICADAS a las perpendiculares *PM*, tiradas de los extremos de las abscisas a la curva. (Euler, 1797, t. II, p. 5)

Luego las aplicadas, al igual que las abscisas, son intervalos cuyas longitudes representan a los valores dados. Las abscisas necesitaban un eje y un origen para que su construcción fuera incuestionable, en cambio cada aplicada dependen para su construcción de la construcción previa de la abscisa correspondiente. Esta dependencia provoca que cada aplicada se levante de manera independiente del resto de las aplicadas y hace innecesario para Euler la introducción un nuevo eje. Así, cada aplicada que se quiere levantar necesita su propia perpendicular.

Ahora bien, dado que *y* puede tomar cualquier valor determinado, Euler tendrá que justificar dónde representar cada tipo de valor real, y de nuevo fija arbitrariamente los valores positivos por encima de la recta, los nulos sobre la recta y los negativos, adoptando el convenio de oposición de signos, por debajo de la recta.

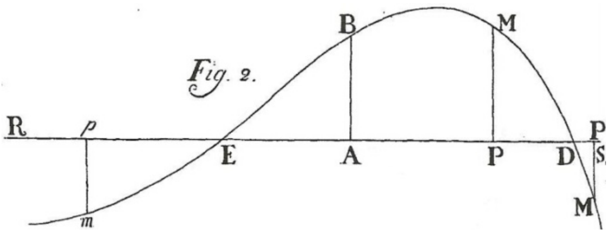


Figura 9

> 4. Puesto que una línea recta indefinida es propia para representar una cantidad variable *x*, buscamos ahora una manera más cómoda de representar geométricamente una función cualquiera de *x*. Sea *y* esta función de *x*, la cual por tanto tomará un valor determinado, si se sustituye *x* por un valor dado.

> Habiendo tomado una recta indefinida *RAS* para representar los valores de *x*, será necesario, para cada valor determinado *AP* de *x*, elevar sobre esta línea una perpendicular *PM*, igual al valor correspondiente de *y*; es decir que, si el valor de *y* es positivo, habrá que colocarla por encima de *RS*; pero si el valor de *y* deviene negativo, habrá que colocarla perpendicularmente por debajo de la recta *RS*. Porque los valores positivos de *y* se toman por encima de la recta *RS*, los que devienen nulos caerán sobre la misma línea, y los que son negativos, por debajo. (Euler, 1797, t. II, pp.2-3)
>
> 5. La figura da pues para *y* una función de *x*, tal que al hacer $x = 0$, *y* tiene un valor positivo = *AB*; que al hacer $x = AP$, $y = PM$; que si x = *AD*, *y* deviene = 0, y que si $x = Ap$, la función *y* toma un valor negativo, y por consiguiente la perpendicular *pm* cae por debajo de la recta *RS*. De la misma manera los valores de *y*, que corresponden a los valores negativos de *x*, se representan por perpendiculares situadas por encima de *RS*, si son positivos; y en caso contrario, deben ser situados por debajo de la recta *RS*, como *pm*; pero si para un valor cualquiera de *x*, como $– x = AE$[34]; *y* deviene = 0; entonces la longitud de la perpendicular deviene nula. (Euler, 1797, t. II, p. 3)

3.5.2. En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*

La ordenada (cuya definición y construcción geométrica reproducimos en el apartado anterior) ya no es la perpendicular, sino su longitud, que se puede expresar mediante el segmento *PM* o su equivalente *AQ*. O lo más importante su longitud, *ab*, llevada sobre la recta *AC*, que se convierte de esta manera en un auténtico eje de ordenadas.

3.5.3. Resumen

Si analizamos comparativamente los conceptos de Euler y Lacroix observamos que en ambos casos la construcción de aplicada o de ordenada se inicia elevando o bajando perpendiculares, respectivamente, bajo las ataduras de la curva a la que pertenece el punto o a su ecuación en la formalización de las definiciones.

Los cambios que apreciamos entre las figuras utilizadas por cada uno de ellos los podemos resumir en dos tipos:

[34] Queremos destacar de nuevo las dificultades que generan los valores negativos en la definición de las abscisas como magnitudes orientadas. Observamos en la figura 9 que la abscisa *AE* está a la izquierda de *A*, luego teniendo en cuenta la orientación de las magnitudes, el valor de *x* que representa es negativo y para que la abscisa considerada como magnitud tenga sentido se ve abocado a expresarla como – *x*, lo que proporciona una expresión realmente curiosa.

1º. Euler utiliza desde el inicio la recta de abscisas en su totalidad, en cambio Lacroix (figura 7) realiza todas sus construcciones en el primer cuadrante.

2º. En Euler, cada ordenada depende de la construcción previa de la abscisa correspondiente, mientras que Lacroix incorpora la presencia de la recta *AC* como eje de ordenadas, que finalmente se convertirá en un auténtico eje de ordenadas.

En cuanto al texto, Lacroix inicia su exposición con el proceso inverso al utilizado por Euler: Euler levanta perpendiculares a partir de los extremos de las abscisas, Lacroix baja perpendiculares con la finalidad de encontrar sus abscisas correspondientes, pero recordemos que Lacroix define ordenada como la otra coordenada, la que no es conocida, como la coordenada *PM* (o como su longitud o como el valor que representa), que en los ejemplos utilizados siempre se ha expresado a partir de la coordenada *AP*, la coordenada conocida. En la preparación del concepto definitivo, Lacroix expone los resultados previos de manera ligeramente distinta a Euler, aunque con los mismos principios. Lacroix sigue utilizando magnitudes, por una parte las distancias *AP*, las abscisas de Euler, referidas sobre la línea *AB*, el único eje de de Euler, cuyo origen es el punto *A*. Por otra parte las magnitudes *PM*, que son descritas de la misma manera que en el texto de Euler, perpendiculares levantadas desde el punto *P* hasta la línea *DE*. Y además, de la misma manera que Euler, pone de manifiesto que, si la relación que hay entre las magnitudes *AP* y *PM* se puede expresar mediante una ecuación algebraica, dicha ecuación caracteriza la línea *DE*.

El cambio realmente importante acontece en el momento en que Lacroix considera la ordenada como la longitud de un segmento, cuyo valor se toma sobre un auténtico eje de ordenadas previamente fijado.

Para que la idea de ordenada abarque todos los valores posibles, queda por determinar la ubicación de las ordenadas correspondientes a los valores negativos de la variable (que frecuentemente Lacroix denomina incógnita), y lo que Lacroix hace es ubicar las ordenadas positivas por encima del eje de abscisa, y por el convenio de oposición de signos, las negativas por debajo.

3.6. EL PASO DE LAS COORDENADAS DE MAGNITUDES A DISTANCIAS.

El paso de la consideración de las coordenadas como magnitudes geométricas a su consideración como distancias será fundamental en el proceso de sistematización de las coordenadas cartesianas.

La sistematización se inicia en el momento que Euler asigna sentido a las magnitudes para dotar de significado en la geometría a las cantidades negativas que surgen en el álgebra cuando quiere asociar las funciones con el trazado de sus curvas correspondientes.

Pero el proceso de sistematización de las coordenadas no había hecho más que empezar y necesitará de muchas aportaciones para que poco a poco se transformen en las coordenadas cartesianas actuales, independientes del trazado de curvas y superficies.

Este proceso de independencia se aprecia claramente en el texto de Lacroix. Lacroix libera a las coordenadas de Euler de la rigidez que imponen los extremos de las magnitudes a las abscisas y sobre todo a las aplicadas: las coordenadas en Lacroix se desprenden de los extremos y conservan, de sus predecesoras, únicamente la distancia o longitud de las magnitudes. Con ello se consigue que las coordenadas pasen de ser intervalos a ser distancias. Esta transformación propicia los intentos reiterados en la obra de Lacroix de independizar las coordenadas del trazado de curvas o de sus ecuaciones. Y aunque no siempre consigue desligar las coordenadas de un punto de la curva a la que pertenece, proporciona los cimientos para que esta independencia se consolide estableciendo unos ejes de coordenadas absolutos.

3.7. ESTABLECIMIENTO DE EJES DE COORDENADAS ABSOLUTOS.

3.7.1. En la *Introductio*

En la *Introductio* las coordenadas no son un par de números sino magnitudes que se representan mediante segmentos dotados de sentido: las abscisas, medidas desde el origen en un único eje, el de abscisas, y las aplicadas, generalmente ortogonales, tomadas desde los extremos de las abscisas.

Abscisas y aplicadas están ligadas entre sí por una curva o por su ecuación. El sistema de coordenadas no se fija previamente, depende de la naturaleza de la curva que quiere representar. Y son los extremos de las aplicadas los puntos que trazan la curva de la función de la que se pretende estudiar sus propiedades.

En el artículo 11 del tomo II, Euler realiza una recapitulación de la terminología que ha utilizado en los artículos precedentes: *eje, origen de abscisas* y *abscisas*. Tal como ya habíamos señalado sólo utiliza un eje, el de abscisas y por ello recibe el nombre de “el EJE” o la *directriz*. Por otra parte, además de definir *aplicadas* como las perpendiculares levantadas desde los extremos de las abscisas a la curva, las clasifica según el ángulo que formen con el eje en perpendiculares u oblicuas, y nos advierte de que, a menos que se indique lo contrario, se utilizarán aplicadas perpendiculares.

> 11. Hay en lo que acabamos de decir sobre la naturaleza de las curvas, ciertos nombres que hay que retener, y cuyo uso es muy frecuente en su teoría.
>
> En primer lugar la recta *RS*, sobre la que se toman los valores de *x*, se llama el EJE, o la *directriz*.
>
> El punto *A*, desde el cual se cuentan los valores de *x*, se llama el *origen de las abscisas*.
>
> Las partes del eje *AP* que representa los valores determinados de *x*, se llaman ordinariamente ABCISAS.
>
> Y se ha dado el nombre de APLICADAS a las perpendiculares *PM*, tiradas de los extremos de las abscisas a la curva.
>
> Las aplicadas se llaman en este caso *perpendiculares* u *ortogonales*, porque forman con el eje un ángulo recto; y como las aplicadas *PM* pueden igualmente formar con el eje un ángulo oblicuo, se las llamará entonces *aplicadas oblicuas*.
>
> Por lo demás, en la explicación que haremos de la naturaleza de las curvas, emplearemos constantemente aplicadas perpendiculares, a menos que advirtamos expresamente de lo contrario. (Euler, 1748, t. II, p.7)

En el artículo 12 sigue con la recapitulación, ahora recordando dónde se deben tomar las abscisas positivas y negativas, así como las aplicadas positivas y negativas.

> 12. Así que si una abscisa cualquiera *AP* está representada por la variable *x*, de manera que $PA = x$; entonces la función y indicará la magnitud de la aplicada *PM*, y se tendrá $PM = y$. La naturaleza de la línea curva, cuando es continua, dependerá por lo tanto de la función, o de la manera en que las cantidades *x*, *y*, y las constantes están combinadas entre ellas.
>
> Así la parte *AS* tomada en el eje *RS* será el lugar de las abscisas positivas, y la parte *AR* será el de las abscisas negativas; en cuanto a las aplicadas, las positivas caerán por encima del eje *RS*, y las negativas por debajo. (Euler, 1748, t. II, p.7)

Euler termina esta parte de recapitulaciones dando la definición de coordenadas perpendiculares: abscisas y aplicadas cuando se consideran conjuntamente reciben el nombre de coordenadas, perpendiculares o no según cómo se hayan levantado las aplicadas.

> 14. Puesto que *y* es una función de *x*, se deduce que *y* será igual a una función explícita de *x*, o que se tendrá una ecuación entre *x* e *y*, que determinará el valor de *y* en *x*. En ambos casos se dice que esta ecuación expresa la naturaleza de la curva. Por lo tanto la naturaleza de una línea curva se da por una ecuación entre dos variables *x* e *y*, en la que la primera *x* representa las abscisas contadas en el eje desde su origen *A*, y la segunda las aplicadas perpendiculares al eje. Estas abscisas y aplicadas consideradas conjuntamente se llaman COORDENADAS *perpendiculares*.
>
> Así se dice que la naturaleza de una línea se expresa por una ecuación entre las coordenadas perpendiculares, cuando hay entre *x* e *y* una ecuación, que expresa la naturaleza de la función *y*. (Euler, 1748, t. II, p.8)

La sistematización de coordenadas en Euler no tiene como objetivo determinar la posición de un punto aislado. En Lacroix sin embargo éste es el objetivo ansiado, aunque no siempre le resulta fácil desprender al punto de las ataduras de la curva o su ecuación. Euler define coordenadas tras la definición y construcción de abscisas y aplicadas, Lacroix, en cambio, comienza por el concepto de coordenadas para posteriormente diferenciar abscisa y ordenada.

3.7.2. En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*

Lacroix libera las coordenadas de la *Introductio* de la rigidez que imponen los extremos de las magnitudes a las abscisas y sobre todo a las aplicadas, se desprende de los extremos y conserva de sus predecesoras únicamente la distancia o longitud de las magnitudes. Cómo lleva a cabo este proceso es lo que pasamos a relatar.

Lacroix define coordenadas (figura 7) de un punto a partir del modo en que se representan las curvas, es decir, utiliza un proceso aceptado en su época (coordenadas geométricas) para convertirlas en coordenadas numéricas: las distancias de los intervalos determinan el punto de la curva. En el momento en que el punto se desprende de la curva quedan establecidas las coordenadas numéricas cuya dirección está determinada por ejes de coordenadas fijados previamente.

> Este modo de representar el curso de la líneas, esto es, las circunstancias de su forma y de su situación, refiriéndolas a una recta por perpendiculares, merece la mayor atención; se ve que él tiene por objeto determinar la posición de un punto cualquiera por medio de dos rectas *AB* y *AC*, perpendiculares entre sí. El punto *M*, figura 34, está determinado cuando se tiene las distancias *AP* y *AQ*, puesto que se

halla en la intersección de las líneas *PM* y *QM*, tiradas por los punto *P* y *Q* paralelamente a las rectas *AB* y *AC*.

Las líneas *AP* y *AQ*, o sus iguales *PM* y *QM*, se llaman *coordenadas*. Comúnmente se emplea la palabra *abscisa* para designar la coordenada que se supone conocida, y a la otra se le da el nombre de *ordenada*. Así en los ejemplos anteriores, en que siempre hemos expresado las líneas *PM* por medio de las *AP*, las tales *PM* expresaban las ordenadas, y las *AP* las abscisas. Las líneas *AB* y *AC*, que determinan la dirección de las coordenadas, se llaman los ejes de las *coordenadas*. (Lacroix, 1820, pp. 136-137)

Pero esto no es suficiente, pues el valor absoluto de las magnitudes no permite establecer de forma biunívoca la localización del plano cartesiano en toda su extensión. La longitud de las coordenadas únicamente mide la distancia a la que el punto se situa respecto de los ejes de coordenadas, por lo que es necesario conocer también el signo de afección de las magnitudes que ha considerado anteriormente, para determinar el cuadrante concreto en el que situar cada punto. Por tanto, es necesario considerar los signos de las coordenadas para fijarlos en un cuadrante determinado, teniendo en cuenta abscisas y ordenadas de forma conjunta y el convenio de oposición de signos. Lacroix establece definitivamente de esta manera las coordenadas de puntos en el plano cartesiano. En la figura 10, observamos cómo la localización de puntos en el plano se hace de forma absoluta, los puntos adquieren indentidad propia, ya no son puntos que pertenecen a una curva. Y teniendo en cuenta la tabla de signos que adjunta (Figura 11) y el texto que acompaña a estas figuras, podemos afirmar que las coordenadas se han transformado de manera considerable.

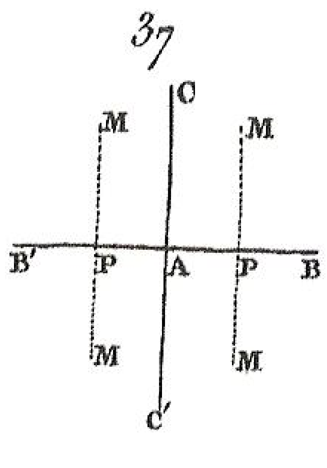


Figura 10

Si sólo se dan los valores absolutos de la abscisa *AP* y de la ordenada *PM*, queda aún indeterminado el punto *M*; pues en tal caso no se conoce más que la distancia de este punto a las rectas indefinidas *BB'* y *CC'*, figura 37; y conservando estas mismas distancias, el tal punto podrá hallarse indiferentemente en uno cualquiera de los cuatro ángulos rectos *BAC, B'AC, B'AC', BAC'*; pero las combinaciones de signos afectados a las coordenadas *AP* y *PM* hacen conocer en cuál de estos ángulos se halla el punto propuesto. En efecto, habiendo convenido en dar el signo + a las partes de la línea *AB*, yendo desde *A* hacia *B*, el signo – será el que es necesario asignar a las partes de *AB'* que están desde *A* hacia *B'*. Del mismo modo si se ha dado el signo + a las partes de *AC*, que están desde *A* hacia *C*, deberemos afectar del signo – a las otras que se hallan desde *A* hacia *C'*. En virtud de lo dicho se tendrá.

$$\text{pour le point } M \text{ de l'angle} \left\{ \begin{array}{l} BAC,\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{lcl} +AP & \text{ou} & +x \\ +PM & & +y \end{array} \right. \\ B'AC,\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{lcl} -AP & & -x \\ +PM & & +y \end{array} \right. \\ B'AC',\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{lcl} -AP & & -x \\ -PM & & -y \end{array} \right. \\ BAC',\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{lcl} +AP & & +x \\ -PM & & -y \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Figura 11

La elección de las líneas *AB* y *AC*, perpendiculares entre sí, no es la única que puede hacerse para determinar sobre un plano la posición de un sistema de puntos: toda combinación de líneas capaz de fijar la posición de un punto, como, por ejemplo, la distancia de él a dos puntos dados, sería propia para este uso; pero comúnmente las *coordenadas perpendiculares* son las que en su empleo presentan más facilidad: en lo sucesivo se verán muchos ejemplos del modo con que se pasa de estas coordenadas a otros diversos modos de asignar sobre un plano la posición de un sistema de puntos. (Lacroix, 1820, pp. 137-138)

En definitiva, las coordenadas en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* determinan la posición de un punto a partir de dos ejes, que fijan la dirección de las coordenadas, y un origen que divide el plano en cuatro ángulos en los que se estable por el convenio de oposición de signos dónde se representa un punto cualquiera según los signos de la abscisa y ordenada conjuntamente. Las coordenadas de Lacroix son un par de valores que se representan en el plano mediante distancias (longitud de una magnitud) siguiendo la dirección de unos ejes absolutos y contadas desde el origen según el convenio de oposición de los signos. De esta manera Lacroix deja definitivamente resuelta la localización de los puntos en el plano cartesiano tal como se siguen representando en la actualidad.

4. TRAZADO DE CURVAS EN EL PLANO.

La sistematización de las coordenadas tanto en Euler como en el texto de Lacroix responde a una necesidad instrumental. Para los dos autores, las coordenadas son el instrumento que permite realizar dos procesos recíprocos: el trazado para cada función-ecuación de una línea recta o curva que exprese su naturaleza, y la obtención, a partir de las relaciones geométricas que se establecen en la curva entre las abscisas y las aplicadas-ordenadas, de la ecuación que asocia la curva con la función, siempre que esto sea posible.

Mientras que Euler en la *Introductio* aborda primero el trazado de curvas, Lacroix comienza en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* por el proceso recíproco, la obtención de la ecuación a partir de la curva entendida como lugar geométrico, y, en el *Traité du Calcul,* como Euler, explicando cómo construir una curva como lugar geométrico a partir de una ecuación dada. Procesos que se plasman en los diferentes textos de la siguiente manera.

En la *Introductio*:

> Así cada función de *x* representada de esta manera en la geometría, dará una línea recta o curva, cuya naturaleza dependerá de la función. (Euler, 1797, t. II, p. 5)
>
> Al igual que con la ecuación entre las coordenadas *x* e *y*, de las cuales la primera representa la abscisa, y la segunda la aplicada, se describe una curva determinada sobre un eje *RS*, al tomar a voluntad un punto *A* para el origen de las abscisas; lo mismo, recíprocamente, si la curva está ya descrita, su naturaleza podrá ser expresada por una ecuación entre las coordenadas. (Euler, 1797, t. II, p. 10)

En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*:

> La ecuación que expresa las relaciones entre las *AP* y las *PM* para una línea dada se llama *ecuación de esta línea,* y ésta se llama el *lugar geométrico* de la ecuación que le pertenece. (Lacroix, 1807, p. 121)
>
> Recíprocamente una ecuación cualquiera, considerada en sí misma, da origen a una curva, cuyas propiedades hace conocer. Como este último punto de vista es el más general y el más fecundo, nos valdremos de él, y por lo mismo deduciremos las líneas por la consideración de las ecuaciones. (Lacroix, 1807, pp. 121-122)

En el *Traité du Calcul*:

> *Cómo las diversas circunstancias del curso de una línea están expresadas por su ecuación.*
>
> Se sabe que toda ecuación que contiene dos indeterminadas *x* e *y*, puede construirse tomando sobre la línea *AB*, fig. 5, a partir de un punto *A*, […]; la línea *MM'M''* que pasa por todos los puntos así hallados, es el lugar de la ecuación propuesta.
>
> Recíprocamente, en toda curva sujeta a una ley regular por su descripción, o dotada de alguna propiedad común a todos sus puntos, existe siempre entre la *abscisa AP*, y la *ordenada PM*, una relación constante que exprese su naturaleza, y de la que se pueden deducir todas sus propiedades.[35] (Lacroix, 1797, p. 327)

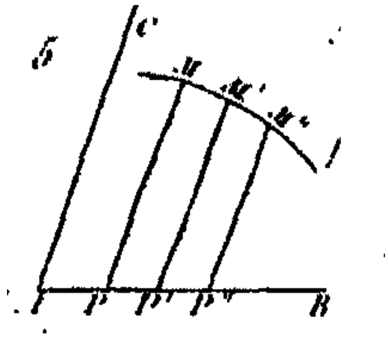


Figura 12

195. On sait que toute équation renfermant deux indéterminées *x* et *y*, peut se construire en prenant sur une ligne *AB*, *fig.* 5, à partir d'un point donné *A*, des portions *AP*, *AP'* *AP''* etc. pour représenter les valeurs de l'une quelconque des indéterminées, celles de *x* par exemple, et en menant par les points *P*, *P'*, *P''* etc. des droites égales aux valeurs correspondantes de *y*, et parallèles à une même droite *AC*, donnée de position, à l'égard de *AB*; la ligne *MM'M''* qui passe par tous les points ainsi trouvés, est le lieu de l'équation proposée. — Comment les diverses circonstances du cours d'une ligne sont exprimées par son équation. FIG. 5.

Réciproquement, dans toute courbe assujettie à une loi régulière par sa description, ou douée de quelque propriété commune à tous ses points, il existe toujours entre l'*abscisse AP*, et l'*ordonnée PM*, une relation constante qui exprime sa nature, et de laquelle on peut déduire toutes ses propriétés. Cette relation ne sauroit dans tous les cas s'obtenir sous une forme algébrique, et de là nait la distinction des courbes, en *courbes algébriques*, et en *courbes transcendantes* (*).

(*) On appelle aussi ces dernières, courbes *méchaniques*; mais cette dénomination me paroît fort impropre, car la description d'une courbe quelconque, à commencer par celle du cercle, ne s'exécute que par des moyens méchaniques, et telle courbe algébrique en exige de plus compliqués que certaines courbes transcendantes.

4.1. ¿QUÉ SISTEMA DE COORDENADAS UTILIZAN EN EL TRAZADO DE CURVAS?

Tanto Euler como Lacroix utilizan las coordenadas en el modo que cada uno de ellos las ha formalizado. En ambos casos el sistema de coordenadas que se considera es en principio el más genérico posible, es decir, el sistema de coordenadas no tiene por qué

[35] Las traducciones del *Tratado de Cálculo* las hemos realizado para esta memoria.

ser ortogonal, ni necesariamente la abscisa representa a la cantidad conocida, la variable x; ni es imprescindible representar las abscisas sobre una misma línea recta (Lacroix explícitamente considera coordenadas desde un punto, aunque él no utiliza este tipo de coordenadas lo que nos induce a pensar que sea una manera de reconocer el tipo de coordenadas que utilizaron sus predecesores e incluso sus contemporáneos) y las aplicadas-ordenadas paralelas entre ellas. Aunque en ambos casos, en aras de la comodidad y de la simplicidad, el trazado de curvas se realizará, salvo que se indique lo contrario, a partir de un sistema de coordenadas perpendiculares, en el que las abscisas se tomarán sobre una misma recta, el eje de abscisas, y representarán el valor de la variable x.

4.1.1. En la *Introductio*:

> […] y como las aplicadas *PM* pueden igualmente formar con el eje un ángulo oblicuo, se las llamará entonces *aplicadas oblicuas*.
>
> Por lo demás, en la explicación que haremos de la naturaleza de las curvas, emplearemos constantemente aplicadas perpendiculares, a menos que advirtamos expresamente de lo contrario. (Euler, 1797, t. II, p. 5)
>
> […] siendo indiferente cuál de las dos cantidades se toma como abscisa o como aplicada: porque una ecuación dada entre dos coordenadas x e y, resulta la misma curva, si se toma x o y para representar la abscisa. (Euler, 1797, t. II, p.13)

4.1.2. En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*:

> Comúnmente se emplea la palabra *abscisa* para designar la coordenada que se supone conocida, y a la otra se le da el nombre de *ordenada*. (Lacroix, 1807, p. 121)
>
> La elección de las líneas *AB* y *AC*, perpendiculares entre sí, no es la única que puede hacerse para determinar sobre un plano la posición de un sistema de puntos: toda combinación de líneas capaz de fijar la posición de un punto, como, por ejemplo, la distancia de él a dos puntos dados, sería propio para este uso; pero comúnmente las *coordenadas perpendiculares* son las que en su empleo presentan más facilidad: en lo sucesivo se verán muchos ejemplos del modo con que se pasa de estas coordenadas a otros diversos modos de asignar sobre un plano la posición de un sistema de puntos. (Lacroix, 1807, p. 121)

4.1.3. En el *Traité du Calcul*:

> La situación respectiva de las líneas *AB* y *AC*, que se llaman *ejes de coordenadas*, así como el punto *A*, que es el *origen*, son arbitrarios y forman parte de las convenciones; ni siquiera es obligado tomar las abscisas sobre la misma línea recta, y las ordenadas paralelas entre ellas, pero este sistema de coordenadas es en general el más cómodo, y veremos más adelante que todos los demás se pueden reducir: para mayor simplicidad, tomaremos siempre el ángulo *BAC* recto, a menos que advirtamos de lo contrario. (Lacroix, 1797, p. 328)

Luego, en general, en ambos casos se utilizará un sistema de coordenadas ortogonal en el que las abscisas se representarán sobre el eje horizontal y las ordenadas perpendicularmente a dicho eje, de manera individualizada para cada aplicada y mediante un eje de ordenadas absoluto en el caso de Lacroix.

4.2. ¿CÓMO SE LLEVA A CABO EL TRAZADO?

4.2.1. En la *Introductio*:

A partir de la función *y*, de su expresión analítica o de una ecuación entre *x* e *y*, se determinan los valores correspondientes de *y* al variar *x*. Los valores de *x* se representan mediante un segmento, la abscisa; y, los de *y* mediante otro segmento, la aplicada, levantado perpendicularmente al eje por el extremo de la abscisa. (Ver figura 9)

Podríamos decir que lo que hace Euler es construir una tabla ilimitada de valores, valores que no son pares ordenados de números sino magnitudes que se representan, en un sistema de coordenadas perpendiculares en el que utiliza un único eje, mediante segmentos (la abscisa y la aplicada) dotados de sentido, siendo los extremos de las aplicadas los que trazan la curva de la función. Pero es necesario advertir que la curva no se describe por un punto que se mueve, ni es un conjunto de puntos.

> 6. Luego si, para cada valor dado de *x*, se determina de esta manera los valores correspondientes de *y*; se elevará en cada punto *P* de la recta *RS* perpendiculares *PM*, que expresan los valores de la función *y*: uno de los extremos *P* caerá sobre la recta *RS*, y el otro *M* por encima de *RS*, si los valores de *y* son positivos; o por debajo, si son negativos; o sobre la misma línea *RS*, si son iguales a cero; como sucede con los puntos *D* y *E*. Los extremos *M* de cada una de las perpendiculares representarán una cierta línea recta o curva, que por consiguiente se encontrará determinada por la función *y*. (Euler, 1797, t. II, p. 3)

> 14. Puesto que *y* es una función de *x*, se deduce que *y* será igual a una función explícita de *x*, o que se tendrá una ecuación entre *x* e *y*, que determinará el valor de *y* en *x*. En ambos casos se dice que esta ecuación expresa la naturaleza de la curva. Por lo tanto la naturaleza de una línea curva se da por una ecuación entre dos variables *x* e *y*, en la que la primera *x* representa las abscisas contadas en el eje desde su origen *A*, y la segunda las aplicadas perpendiculares al eje. (Euler, 1797, t. II, p. 6)

De las dos explicaciones que, según Klein (2006), Euler utiliza de la palabra función, apreciamos en el trazado de curvas la segunda de ellas: una función, *y* de *x*, queda definida para Euler siempre que una curva cualquiera sea dibujada en un sistema de coordenadas, en el que sólo utiliza un eje.

4.2.2. En el *Traité du Calcul*:

A partir de una ecuación entre *x* e *y*, los valores de *x* se representan mediante segmentos sobre el eje de abscisas cuya longitud es el valor de *x*; y los valores de *y*, mediante segmentos según la dirección, fijada a priori, de la recta *AC* y de longitud el valor de *y* correspondiente. (Ver figura 12)

> Se sabe que toda ecuación que contiene dos indeterminadas *x* e *y*, puede construirse tomando sobre la línea *AB*, fig. 5, a partir de un punto *A*, porciones las *AP*, *AP*', *AP*'', etc. para representar los valores de una cualquiera de las indeterminadas, los de *x* por ejemplo, y tirando por los puntos *P*, *P*', *P*'', etc. rectas iguales a los valores correspondientes de *y*, y paralelos a una misma recta *AC*, dada de posición, con respecto a *AB*; la línea *MM*'*M*'' que pasa por todos los puntos así hallados, es el lugar de la ecuación propuesta. (Lacroix, 1797, p. 327)

Luego en el *Traité du Calcul* de Lacroix sigue utilizando las magnitudes para trazar la línea como lugar geométrico correspondiente a una ecuación (ver figura 12). Las longitudes *AP* (las abscisas) representan los valores de *x*; las magnitudes *PM*, cuya longitud (la ordenada) representa los valores de *y*, levantadas paralelamente al eje *AC* desde el punto *P*. De momento, como en la *Introductio*, son los extremos de los segmentos *PM* los puntos que dan lugar al trazado de la curva.

La curva no se describe como un punto que se mueve, pero aunque de la ecuación solamente se puedan obtener puntos aislados, siempre se podrán determinar puntos tan inmediatos como se quiera ya que la variable *x* puede tomar cualquier valor y por tanto la diferencia entre dos valores de *x* podrá ser tan pequeña como se desee, así lo expresa el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* (la cita textual se puede ver en el apartado 4.5).

Pero además en el *Traité du Calcul*, Lacroix elabora una tabla de valores para construir la curva por puntos, con el propósito de conocerla mejor. Puntos cuyos valores se calculan en la ecuación correspondiente y se representan en el plano, en un sistema de coordenadas perpendiculares con dos ejes, mediante la longitud de segmentos, como se ha explicado en la figura 12, y teniendo en cuenta el sentido de los mismos, según representen valores positivos o negativos. Es decir, representando los puntos tal como hemos analizado que estableció en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*, obra que recordamos que se publicó en el mismo año que el *Traité du Calcul*, pero teniendo en cuenta que esta última llevaba muchos años preparándola y que es su gran obra.

Teniendo en cuenta que el concepto de función en la época de Lacroix no es el concepto actual, veamos como representa la curva de ecuación

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$$

en el caso $a = 1$.

Despejando y en la ecuación $y^4 - 96y^2 + 100x^2 - x^4 = 0$ se obtiene las cuatro expresiones siguientes:

$$y = \sqrt{48 + \sqrt{x^4 - 100x^2 + 2304}} \; \ldots\text{..(1)}$$

$$y = \sqrt{48 - \sqrt{x^4 - 100x^2 + 2304}} \; \ldots\text{..(2)}$$

$$y = -\sqrt{48 + \sqrt{x^4 - 100x^2 + 2304}} \; \ldots\text{(3)}$$

$$y = -\sqrt{48 - \sqrt{x^4 - 100x^2 + 2304}} \; \ldots\text{(4).}$$

Expresiones que darán lugar a cuatro ramas[36] semejantes dos a dos, (1) y (3); y, (2) y (4). Por ello será suficiente considerar las ecuaciones (1) y (2) para elaborar la tabla de valores que harán conocer mejor la figura de la curva (figura 13), puesto que los valores de las ecuaciones (3) y (4) se obtienen por oposición de signos.

---

[36] En el anexo XIII se puede ver una reconstrucción actual del trazado de las cuatro ramas.

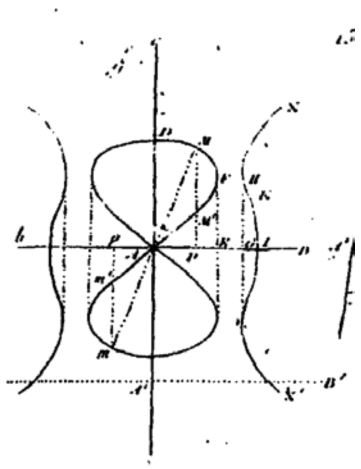


Figura 13

Lacroix elabora la tabla dando sucesivamente a *x* los valores 1, 2, 3, 4, etc., y calculando los valores de *y* por aproximación, y la presenta de la siguiente manera:

Lorsque $x=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	etc.
l'équation (1) donne $y=$	9,798	9,744	9,582	9,302	8,887	8,289	6,928	*imagin.*	6,928	8,698	9,798	10,845	11,872	etc.
et l'équation (2) donne $y=$	0	1,021	2,045	3,076	4,125	5,224	6,928	*imagin.*	6,928	4,510	0	*imagin.*	*imagin.*	etc.

En la tabla se aprecia que, cuando se obtienen para *y* valores imaginarios, no hay puntos de la curva que se correspondan con esos valores.

4.3. ¿CÓMO COMPROBAR QUE TODOS LOS PUNTOS DE LA CURVA TRAZADA SE PUEDEN OBTENER A PARTIR DE LA ECUACIÓN DADA?

Para que el modo de trazar las curvas tanto en Euler como en Lacroix no genere incoherencias es necesario, en ambos casos, justificar que el trazado de curvas llevado a cabo también es válido en el sentido inverso. Es decir, al tomar un punto cualquiera de la curva, las coordenadas que determinan su posición en el plano tomadas en sentido inverso deben proporcionar valores que expresen los valores de la variable *x* y de sus correspondientes valores de *y*. De una manera genérica tanto Euler como Lacroix lo recogen en sus textos.

4.3.1. En la *Introductio*:

En las siguientes citas, el texto hace referencia a la figura que corresponde a la figura 9 de la *Introductio*.

> 7. Se reconoce perfectamente, siguiendo este procedimiento, la línea curva que resulta de la función *y*, puesto que es esta función la que determina todos los puntos; en efecto, para cada punto *P* se tiene la longitud de la perpendicular *PM*; cuyo extremo *M* pertenece a la curva; y se hallan así todos los puntos de esta línea. Por lo tanto, cualquiera que sea la naturaleza de la curva, se puede llevar de cada uno de sus puntos perpendiculares a la recta *RS*; se obtiene de esta manera los intervalos *AP*, que expresan los valores de la variable *x*, y las longitudes de las perpendiculares *PM*, que representan los valores de la función *y*; así no habrá ningún punto de la curva, que no esté determinado de esta manera por medio de la función *y*.
>
> 8. Aunque se pueden describir mecánicamente muchas líneas curvas por el movimiento continuo de un punto, que presenta a los ojos la curva en su conjunto, aquí las consideraremos principalmente como el resultado de funciones; esta manera de considerarlas es más analítica, más general y más propia del cálculo. Así una función cualquiera de x dará una cierta línea recta o curva; de donde se sigue que recíprocamente se podrá relacionar las funciones con las líneas curvas. Por consiguiente la naturaleza de una línea curva estará determinada por una función de *x*, que representará siempre la longitud de la perpendicular *MP*, mientras que los intervalos *AP* tomados en la línea *RS*, sobre la cual caen las perpendiculares *MP* bajadas desde cada punto *M* de la curva, son indicadas por la variable *x*. (Euler, 1797, t. II, pp. 3-4)

4.3.2. En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*.

En la siguiente cita, el texto hace referencia a la figura que corresponde a la figura 7 de este tratado.

> Si la relación que hay entre *AP* y *PM* entre *AP’* y *P’M’* etc. puede ser expresada por una ecuación algebraica, esta ecuación caracterizará la línea *DE*, y podrá servir para hacer conocer sucesivamente todos sus puntos; esto lo manifestaremos en dos ejemplos muy simples. (Lacroix, 1807, p. 116)

Ejemplos que analizamos en el capítulo anterior: la obtención de la ecuación de la recta que pasa por el origen y de la ecuación de la circunferencia.

4.4. ¿Cómo obtener la ecuación a partir del curso de la curva?

En la *Introductio* y el *Traité du Calcul* se plantea de una forma teórica, en cambio en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*, además de teóricamente, se detalla con ejemplos recurriendo a las propiedades geométricas de las magnitudes Utilizaremos en esta ocasión el ejemplo de la obtención de la ecuación de la circunferencia.

4.4.1. En la *Introductio*:

> 23. Al igual que con la ecuación entre las coordenadas *x* e *y*, de las cuales la primera representa la abscisa, y la segunda la aplicada, se describe una curva determinada sobre un eje *RS*, al tomar a voluntad un punto *A* para el origen de las abscisas; lo mismo, recíprocamente, si la curva está ya descrita, su naturaleza podrá ser expresada por una ecuación entre las coordenadas. Pero aquí, aunque la curva esté dada, sin embargo dos cosas quedan indeterminadas, saber la posición del eje *RS*, y el origen *A* de las abscisas; y, como se podrá variar de una infinidad de maneras, se sigue que se podrá tener para una misma línea curva una cantidad innumerable de ecuaciones; así no se puede siempre de la diversidad de ecuaciones concluir el de las líneas curvas que encierran, aunque curvas diferentes dan siempre ecuaciones diferentes. (Euler, 1979, t. II, pp. 23-24)

4.4.2. En el *Traité du Calcul*:

> Recíprocamente, en toda curva sujeta a una ley regular por su descripción, o dotada de alguna propiedad común a todos sus puntos, existe siempre entre la *abscisa AP*, y la *ordenada PM*, una relación constante que exprese su naturaleza, y de la que se pueden deducir todas sus propiedades. Esta relación no puede obtenerse en todos los casos bajo una forma algebraica, y de ella nace la distinción de las curvas, en *curvas algebraicas*, y en *curvas transcendentes*. (Lacroix, 1797, p. 327)

4.4.3. En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*:

> La ecuación que expresa las relaciones entre las *AP* y las *PM* para una línea dada se llama *ecuación de esta línea*, y ésta se llama el *lugar geométrico* de la ecuación que le pertenece. (Lacroix, 1807, p. 121)

Recordemos que de la definición de circunferencia como lugar geométrico obtuvo la ecuación $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ utilizando las relaciones que se establecen en un triángulo rectángulo. Ecuación que fijó a partir de valores del primer cuadrante y, como en la ecuación determinada por la construcción geométrica los valores de *x* e *y* pasan a ser incógnitas, es decir, dejan de estar limitados por las distancias a las que representan, pueden tomar valores negativos a partir de los cuales se puede dibujar la circunferencia en el resto de los cuadrantes haciendo uso de los resultados obtenidos en la ecuación. Es decir, cualquier par de números que cumpla la ecuación generará un punto de la circunferencia.

A raíz de este problema, junto con el de la ecuación de la recta, surge el concepto de continuidad de una curva entendida como el curso continuo de la línea.

4.5. ¿QUÉ SIGNIFICA CURVA CONTINUA EN EULER Y LACROIX?

4.5.1. En la *Introductio*

Curva continua en Euler hace referencia a la invariabilidad de la ecuación o expresión analítica que define a la función *y*, y dado que *y* puede tomar para algunos valores de *x* solamente valores imaginarios o varios valores, a menudo no se puede dibujar la curva continua de un solo trazo, pero no por ello deja de ser una curva continua. Y por tanto curva discontinua en Euler no significa de trazo discontinuo, sino una curva que necesita más de una expresión analítica para expresar su naturaleza, es decir una curva discontinua es la que está formada por trozos de funciones continuas.

> 13. Una función cualquiera de *x* da lugar a una línea curva continua, se deduce que podemos de esta manera conocerla y describirla. Porque damos a *x* valores positivos, que crecen sucesivamente de 0 a ∞, y buscamos para cada uno de los valores correspondientes de la función, que se representan por las aplicadas llevadas por encima o por debajo, según que sean positivas o negativas, se tendrá la parte de la curva *BMM*. Análogamente dando después a *x* todos los valores negativos desde 0 hasta ∞, los valores correspondientes de *y* determinarán la parte *BEm* de la curva, así toda la curva contenida en la función estará descrita. (Euler, 1797, t. II, p. 6)

> 9. De esta idea de líneas curvas resulta naturalmente su división en continuas y en discontinuas o mixtas. La línea curva continua es aquella cuya naturaleza está expresada por una sola función determinada de *x*. Pero, si la línea curva está compuesta de diferentes porciones *BM*, *MD*, *DM*, etc. determinadas por varias funciones de *x*, de manera que una parte *BM* es el resultado de una función, otra *MD* el de una segunda función, llamamos a estas especies de líneas curvas discontinuas, o mixtas e irregulares, porque no están formadas según una única ley constante, y están compuestas de porciones de diferentes curvas continuas. (Euler, 1797, t. II, p. 4)

Euler clasifica también las curvas de la misma manera que las funciones: una curva continua es algebraica o geométrica si la aplicada es una función algebraica; si, por el contrario, la ecuación que relaciona las coordenadas *x* e *y* es trascendente, la curva continua es trascendente.

> 15. Ya que el conocimiento de las líneas curvas se reduce al de las funciones, habrá tantas especies de líneas curvas como funciones hemos visto que había. Así las curvas se dividen muy bien, igual que las funciones, en *algebraicas* y en *transcendentes*. La curva será algebraica, si la aplicada *y* es una función algebraica de la abscisa *x*; y, cuando la naturaleza de una curva se expresa por una ecuación algebraica entre las coordenadas *x* e *y*, también es costumbre llamar a este tipo de líneas curvas *geométricas*. Una curva *trascendente* es la que la naturaleza se expresa por una ecuación trascendente entre *x* e *y*, o en la que y deviene una función trascendente de *x*. Tal es la principal división de las líneas curvas continuas, que son o *algebraicas* o *transcendentes*. (Euler, 1797, t. II, pp. 6-7)

Para describir la curva que resulta de una función será necesario saber si la función es uniforme o multiforme, puesto que de ello depende que para cada abscisa determinada se obtenga o no una única aplicada determinada, hecho que provocará que a cada abscisa se le asigne o no un único punto de la curva. Pudiendo obtener de esta manera una curva cuyo curso sea continuo o no. Al hablar ahora de continuo, parece que Euler se refiere al poder dibujar la curva de un solo trazo.

Tal como hace con las funciones empieza estudiando la curva que describe una función uniforme (figura 9): para cada uno de los infinitos valores (reales) de la cantidad variable se obtiene un único valor de la función, que corta a la curva en un único punto. Y puesto que el eje se extiende hasta el infinito, la curva también lo hace de derecha a izquierda sin interrupción. La podemos dibujar, por tanto, de un solo trazo.

> 16. Para describir una línea curva resultante de una función de *x*, que da el valor de la aplicada *y*, se tendrá que prestar atención a la naturaleza de esta función, para saber si es uniforme o multiforme. Supongamos en primer lugar que *y* sea una función uniforme de *x*, o que $y=P$, siendo *P* una función uniforme de *x* cualquiera, como al dar a *x* un valor determinado cualquiera, se obtiene también para *y* un valor determinado; se deduce que a cada abscisa corresponderá una aplicada, y que por consiguiente la curva será de tal forma, que si elevamos a un punto cualquiera *P* del eje *RS* una perpendicular *PM*, esta perpendicular cortará siempre la curva, y en un solo punto *M*. Así a cada punto del eje corresponderá un punto de la curva; y como el eje se extiende al infinito de ambos lados, la curva se extenderá también al infinito de ambas partes; o la curva que nace de tal función, se extenderá hasta el

infinito en ambos lados con el eje de un curso continuo, como muestra la figura 2, en que la línea curva *mEBMDM* se extiende al infinito sin interrupción de derecha a izquierda. (Euler, 1797, t. II, p. 7)

En una función biforme, a cada abscisa le corresponde un doble valor de la aplicada, estos dos valores pueden ser o los dos reales o los dos imaginarios, e incluso pueden ser iguales. La figura 14 representa de manera genérica la curva asociada a una función biforme, ya que en ella se encuentran reflejados los tres tipos de valores que pueden obtener las aplicadas.

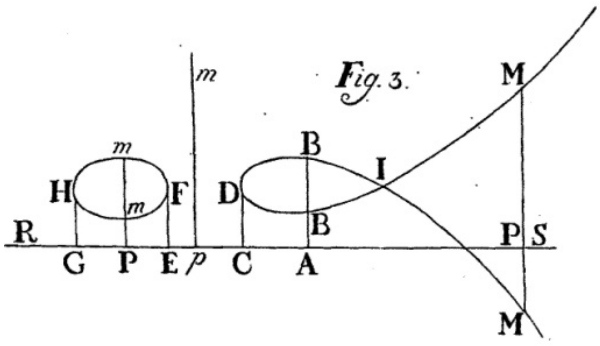


Figura 14

La expresión analítica que Euler utiliza para obtener los valores de las aplicadas no es exactamente la misma que en el primer tomo, tal vez porque en este segundo tomo ya no le interesa tanto hacer referencia a las relaciones de Cardano-Viète y sí simplificar las expresiones que le permiten estudiar y clasificar de forma muy sencilla los distintos valores que pueden tomar las aplicadas.

En el primer tomo Z es una función biforme si está determinada por una ecuación cuadrática expresada de la forma: $Z^2 - PZ + Q = 0$; y entonces $Z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$

En cambio, en el segundo, una función biforme (figura 3) presenta la siguiente forma $yy = 2Py - Q$ o $y = P \pm \sqrt{(PP - Q)}$; donde, además del cambio del nombre de la variable, ha cambiado la forma general de la ecuación cuadrática y, en consecuencia, la manera de expresar los valores de la aplicada, facilitando de esta forma la clasificación de los valores de las aplicadas según los valores de P y de Q.

Si $PP > Q$ los dos valores de y son reales, para cada abscisa AP hay dos aplicadas que cortan a la curva en dos puntos.

Si $PP < Q$ los dos valores de y son imaginarios entonces no hay aplicada que corresponda a la abscisa o la perpendicular levantada por este punto no encuentra la curva por ninguna parte. Como ocurre con el punto *p*.

Si $PP < Q$ los dos valores de y son imaginarios, y entonces no hay aplicada que corresponda a la abscisa, o la perpendicular levantada por este punto no encuentra la curva por ninguna parte. Como ocurre con el punto *p*.

Pero como $PP > Q$ para devenir $< Q$ tiene que pasar por el caso $PP = Q$, límite entre las aplicadas reales e imaginarias, entonces $y = P \pm 0$ y las dos aplicadas son iguales y la curva forma en este punto una inflexión. Como ocurre en *C* y en *G*.

Aunque la curva esté compuesta por dos o más partes separadas, es decir no se pueda dibujar de un trazo continuo, es una curva continua pues resulta de una única función.

> 18. Está claro, después de la inspección de la figura, que, mientras que la abscisa negativa $-x$ está contenida entre los límites *AC* y *AE*, la aplicada *y* es imaginaria; pero que al avanzar hacia la izquierda más allá del punto *E*, las aplicadas vuelven a ser reales; esto no puede suceder, a menos que se tenga en *E*, $PP = Q$, y que por consiguiente las dos aplicadas no se confundan. Entonces a las abscisas *AP* corresponden de nuevo una doble aplicada *Pm*, *Pm*, hasta que llegamos a *G*, donde las dos aplicadas se confunden; y más allá de *G*, todavía son imaginarias. Una curva tal podrá pues estar compuesta de dos o más partes separadas unas de otras, como *MBDBM* y *FmHm*: sin embargo el conjunto de estas partes se considera que no forman más que una línea curva continua o regular, porque estas resultan de una sola y misma función. Estas curvas tiene pues esta propiedad que, si prolongamos las perpendiculares *MM* elevadas en cada punto del eje, no encontrarán la curva por ninguna parte, o la cortarán en dos puntos, a menos que por suerte los dos puntos de intersección no se reúnan en uno solo, lo que sucede cuando las aplicadas pasan por los puntos *D*, *F*, *H* e *I*. (Euler, 1797, t. II, p. 8)

Para las funciones triformes utiliza la misma expresión que en el primer tomo I, cambiando únicamente el nombre a la variable. En las triformes, para cada valor de la abscisa, la aplicada tendrá tres valores, que serán los tres reales o uno real y los otros dos imaginarios. Como a cada abscisa le corresponde al menos una aplicada real en este caso la curva se extiende al infinito. Esta curva podrá estar formada por un solo trazo continuo, como la figura 15.

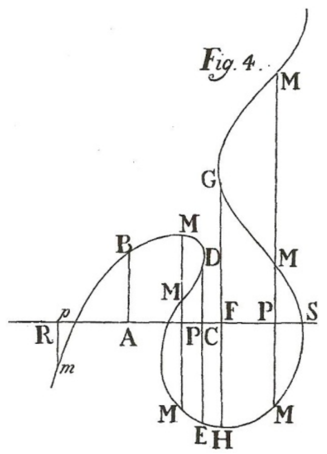


Figura 15

O por dos o más partes separadas, como la figura 16.

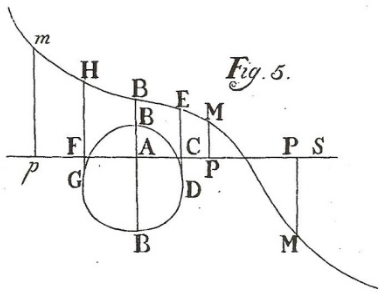


Figura 16

Pero en ambos casos será una curva continua pues resulta de una sola función.

También para las funciones cuadriformes utiliza la misma expresión que en el tomo I. La figura 6 del texto de Euler representa la curva de una función cuadriforme en la que se observa que a cada abscisa le corresponden cuatro aplicadas, o dos o ninguna o se reúnen en una sola. Cuando los valores que se obtienen para la aplicada son imaginarios, éstos no proporcionan puntos en la curva. La curva de una función cuadriforme presentará cuatro ramas que se extienden al infinito o dos o ninguna, en este último caso la curva estará cerrada por todas partes y su forma será del tipo que muestra la figura 17.

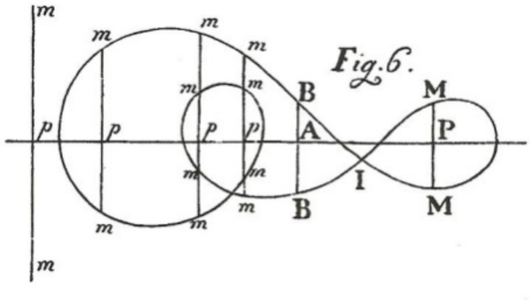


Figura 17

Tras estos ejemplos hace una generalización primero del número de valores reales de la aplicada, y después del número de ramas infinitas que puede tener una curva asociada a una función multiforme. Para funciones multiformes de grado superior a cuatro ya no proporciona ninguna figura.

> 21. Si y es una función multiforme, o está determinada por una ecuación, en la que *n* sea el mayor exponente de la potencia de y, en este caso el número de valores reales de y será o *n*, o *n*-2, o *n*-4, o *n*-6, &c.; cada aplicada cortará pues a la curva en otros tantos puntos. Así, si una aplicada corta a la curva continua en *m* puntos, todos los otros la cortarán en un número de puntos, que siempre diferirá de *m* en un número par, así pues la curva no podrá estar cortada en ninguna parte en *m*+1, *m*−1, o *m*±1, &c. puntos; es decir, que si el número de intersecciones de una aplicada es par o impar, todas las demás aplicadas la cortarán también en un número par o impar de puntos.
>
> 22. Por consiguiente si una aplicada corta a la curva en un número impar de puntos, es imposible que haya un punto donde ya no pueda ser alcanzada por otro. La curva tendrá pues, a cada lado, al menos una rama infinita, y si de una parte y otra hay más ramas, que se extienden al infinito, el número debe ser impar, puesto que el número de intersecciones de cada aplicada no puede ser par, pues, si contamos de todas las ramas infinitas de una y otra parte, su número será constantemente par. La misma observación ha lugar, si las aplicadas encuentran la curva en un número par de puntos, porque entonces no habrá en particular de una y otra parte ninguna rama que se aleje hasta el infinito, o habrá dos, o cuatro, &c., y por consiguiente el número de todas las ramas infinitas será todavía par. Hemos pues adquirido ya el conocimiento de algunas propiedades notables, que aparecen en las curvas continuas y regulares, y que pueden servir para distinguirlas de las curvas discontinuas e irregulares. (Euler, 1797, t. II, pp. 9-10)

4.5.2. En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*:

En ningún momento aparece el concepto de función, sino de las ecuaciones que determinan y quedan determinadas por su trazado. Por esta razón, el concepto de continuidad del que habla Lacroix, no hace referencia a la continuidad de una función tal como se entiende en la actualidad, sino que hace referencia al curso continuo de las líneas (curvas), en este caso, de la línea recta y de la circunferencia.

Aunque las ecuaciones

$$y = ax, \;\; y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

> Solo saquen valores pertenecientes a puntos siempre separados; sin embargo, la continuidad que resulta de la descripción de la línea recta y del círculo, representadas estas líneas respectivamente por aquellas ecuaciones, no puede ser alterada, porque se puede siempre determinar, por medio de tales ecuaciones, dos puntos tan inmediatos uno a otro como se quiera, a causa de que basta tomar para *x* dos valores consecutivos casi iguales, y que nada es capaz de limitar la pequeñez de la diferencia que se puede poner entre ambos valores de *x*. (Lacroix, 1807, p. 119)

Tras analizar cómo se lleva a cabo el trazado de curvas tanto en Euler como en Lacroix, podemos concluir que existen diferencias en el modo que cada uno de ellos ha abordado dicho trazado.

Para Boyer (Boyer, 2004, p.180), “la primera parte de la *Introductio* se dedica al “análisis puro”, la segunda a la “aplicación del álgebra a la geometría”. Este último es un tratado sistemático sobre la geometría analítica en el sentido de Fermat. Ambos lados del principio fundamental están claramente declarados por Euler: con Descartes, reconoce que: “la naturaleza de cualquier curva es dada por alguna ecuación entre dos variables *x* e *y* de los cuales *x* es la abscisa e *y* es la ordenada”; y con Fermat él sostiene que “cualquier función de *x* da lugar a una línea curva continua que se puede describir mediante su trazado”.

Euler ha sustituido el término cartesiano de *construcción* por el de gráfico. Con ello se decanta más hacia el aspecto *fermatiano* del trazado de curvas dadas por sus ecuaciones que hacia la derivación *cartesiana* de las ecuaciones de los lugares.

En cambio Lacroix tanto en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* como en el *Traité du Calcul* recupera el término cartesiano de *construcción* y se decanta más por la derivación cartesiana de las ecuaciones de los lugares geométricos que por el trazado de curvas en el sentido *fermatiano*.

5. CAMBIO DE COORDENADAS.

Del estudio realizado hasta el momento podemos concluir que tanto en la *Introductio* como en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* y en el *Traité du Calcul*, curvas diferentes dan origen a ecuaciones diferentes; pero ecuaciones diferentes, dada la arbitrariedad del sistema de coordenadas, no tienen por qué dar origen a curvas diferentes. Para determinar qué ecuaciones están asociadas a una misma curva hay que obtener las ecuaciones de cambio de coordenadas. Ecuaciones que a la postre proporcionarán las ecuaciones generales de los distintos tipos de ecuaciones (funciones), de las que solamente analizaremos, en el apartado siguiente, la ecuación general de la recta.

Así pues, dedicaremos este capítulo a analizar y comparar de qué manera se justifica el cambio de coordenadas en la *Introductio* y en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* y en el *Traité du Calcul*; así como el proceso seguido en cada tratado para la obtención las ecuaciones del cambio de coordenadas.

Euler dedica íntegramente el segundo capítulo del tomo II de la *Introductio* al cambio de coordenadas, cambio que utilizará para obtener la ecuación general de la recta en el plano. Este capítulo consta de 24 artículos y utiliza 9 figuras nuevas.

Lacroix dedica en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* los artículos 121, 122, 123 y 124 y dos figuras, la 50 y la 51, al cambio de coordenadas. Tras un estudio completo y sistemático de la recta, obtiene las ecuaciones de transformación de coordenadas que inmediatamente utiliza para obtener las ecuaciones reducidas de las cónicas. Este estudio es muy similar, aunque un poco más detallado, al que aparece en el *Traité du Calcul*. En este tratado dedica al cambio de coordenadas, en un capítulo titulado *De la transformación de las coordenadas y de sus principales usos,* los artículos 210 y 211 y dos figuras, las figuras 15 y 16 que son idénticas a las figuras 50 y 51 que utiliza en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*. En el *Traité du Calcul* las ecuaciones de cambio de coordenadas se deducen después de la construcción de las curvas[37] producidas por ecuaciones algebraicas de dos indeterminadas y el estudio de las características y peculiaridades del curso de cada curva, construido en un sistema de coordenadas

[37] Lacroix clasifica las líneas en órdenes (clasificación que Lacroix reproduce en el artículo 202) según el grado de la ecuación, desprendiéndose de los géneros de la clasificación de Newton (esta clasificación se puede ver en el anexo XII). Así pues, la clasificación de Lacroix de las líneas queda de la siguiente manera: la línea recta forma el primer orden, las de segundo orden las que su ecuación es de segundo grado y así sucesivamente. Ver Lacroix, 1797, p. 332.

ortogonal según los valores de las incógnitas *x* e *y* en la ecuación dada. El primer uso que hace de las ecuaciones del cambio de coordenadas, al igual que en su otro tratado, será para reducir la ecuación general de las líneas de segundo grado.

> **212. Le premier usage que nous ferons de la transformation des coordonnées sera de réduire à ses formes les plus simples, l'équation générale des lignes du second ordre,**
>
> $$A + 2Bx + 2Cy + Dx^2 + 2Exy + Fy^2 = 0 \ldots (1)$$

5.1. ¿CÓMO SE JUSTIFICA LA NECESIDAD DEL CAMBIO DE COORDENADAS EN CADA TRATADO?

5.1.1. En la *Introductio*:

En artículos 23 y 24 expone la necesidad de estudiar el cambio de coordenadas de la siguiente manera: las curvas diferentes es evidente que tendrán asociadas ecuaciones diferentes, ahora ya no habla de funciones sino de ecuaciones, pero ante una curva dada como en la figura 9, la arbitrariedad tanto del eje como del origen de las abscisas provoca que el número de ecuaciones que pueden expresar su naturaleza sea innumerable. Así pues, será necesario encontrar un método que permita pasar de una ecuación a otra facilitando de este modo el estudio de la diversidad de las curvas por medio de sus ecuaciones. El método al que se refiere es la obtención de las ecuaciones del cambio de coordenadas, que al aplicarlo sobre una ecuación dada proporciona una nueva ecuación en otras coordenadas de la misma curva.

> 23. Al igual que con la ecuación entre las coordenadas *x* e *y*, de las cuales la primera representa la abscisa, y la segunda la aplicada, se describe una curva determinada sobre un eje *RS*, al tomar a voluntad un punto *A* para el origen de las abscisas; lo mismo, recíprocamente, si la curva está ya descrita, su naturaleza podrá ser expresada por una ecuación entre las coordenadas. Pero aquí, aunque la curva esté dada, sin embargo dos cosas quedan indeterminadas, saber la posición del eje *RS*, y el origen *A* de las abscisas; y, como se podrá variar de una infinidad de maneras, se sigue que se podrá tener para una misma línea curva una cantidad innumerable de ecuaciones; así no se puede siempre de la diversidad de ecuaciones concluir el de las líneas curvas que encierran, aunque curvas diferentes dan siempre ecuaciones diferentes.
>
> 24. Puesto que al variar el eje y el origen de las abscisas, se multiplican indefinidamente las ecuaciones que expresan la naturaleza de una misma curva, es necesario pues que sean todas de tal forma que una sola una vez dada pueda hacer

> encontrar todas las otras; porque la ecuación dada entre las coordenadas hace conocer la curva misma y aquélla, una vez conocida, si se toma una recta cualquiera para el eje, y sobre esta línea un punto para el origen de las abscisas, determinará la ecuación entre las coordenadas perpendiculares. Daremos en este capítulo un método mediante el cual, la ecuación dada la ecuación de una curva, se puede hallar respecto de otro eje cualquiera y otro origen de abscisas, una ecuación entre las coordenadas, la cual expresa la naturaleza de la misma curva: se encontrará de esta manera todas las ecuaciones, que pueden convenir a la misma curva, y será así más fácil juzgar la diversidad de las líneas curvas por las de las ecuaciones. (Euler, 1797, t. II, pp. 12-13)

Lacroix plantea la necesidad del cambio de coordenadas de la siguiente manera.

5.1.2. En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*

Dado que la ecuación de una misma curva toma diferentes formas según el sistema de coordenadas al que esté referida, será útil saber cambiar de coordenadas con el fin de obtener la ecuación más sencilla posible asociada a una línea (curva) cualquiera.

> cercle, on reconnaîtra que l'équation d'une même ligne prend des formes très-différentes, suivant les coordonnées auxquelles on la rapporte. Il peut donc être utile de savoir changer ces coordonnées, afin de pouvoir passer à celles qui donnent pour la ligne proposée, l'équation la plus simple; et je vais chercher en conséquence les formules générales pour changer les coordonnées d'une courbe en d'autres situées d'une manière quelconque, tant par rapport aux premières qu'entre elles.

(Lacroix, 1807, p. 172)

> … se notará que la ecuación de una misma línea toma diferentes formas, según las coordenadas a que se refiere. Por consiguiente puede ser útil saber cambiar de coordenadas, a fin de pasar a aquellas que den, para la línea de que se trate la ecuación más sencilla; y en vista de esto vamos a buscar fórmulas generales para cambiar las coordenadas de una curva a otras situadas de cualquier modo, ya sea con respecto a las otras, o a ellas mismas. (Lacroix, 1820, p. 197).

5.1.3. En el *Traité du Calcul*:

La arbitrariedad de la posición de los ejes de coordenadas provoca que una misma curva se pueda expresar mediante diferentes ecuaciones, el objetivo de conseguir las ecuaciones más sencillas para cada curva induce a la búsqueda de las ecuaciones que permitan cambiar de coordenadas.

> 210. La position des axes des coordonnées étant arbitraire, il s'ensuit qu'on peut la changer sans altérer la nature de la courbe qu'on considère, et que par conséquent la même courbe doit avoir différentes équations, parmi lesquelles il s'en trouvera nécessairement de plus simples que les autres. La courbe du n°. 204,
>
> De la transformation des coordonnées et de ses principaux usages.

5.2. OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE CAMBIO DE COORDENADAS.

5.2.1. En la *Introductio*:

Euler estudia de forma exhaustiva las diferentes posibilidades y en todas ellas sigue el mismo esquema de trabajo:

1. Parte de una figura en la que está descrita una curva asociada a una ecuación entre *x* e *y* cualquiera dada. El eje de abscisas es la recta *RS* y el origen el punto *A*. De manera que *x* representa la abscisa *AP* e *y* la aplicada *PM*, que son las coordenadas de un punto genérico de la curva, *M*, respecto del eje y el origen elegidos.
2. Hace un cambio de origen o de eje o de ambos.
3. Expresa las nuevas coordenadas del punto *M*, a la nueva abscisa la llama *t* y a la nueva aplicada *u*.
4. Busca una relación entre las distintas coordenadas.
5. Obtiene las ecuaciones del cambio de coordenadas, que permiten al sustituir en la ecuación dada expresar la curva a partir de una nueva ecuación entre *t* y *u*.

En total estudia 5 casos, aunque el último es el caso general y los anteriores son casos particulares de este último pero más sencillos que ayudan a entender la obtención de las ecuaciones del cambio de coordenadas para cualquier eje y cualquier origen.

- CASO 1. Cambia origen de abscisas y mantiene el eje. (Figura 7, artículos 25-27).
- CASO 2. Cambia el eje y el origen: eje PARALELO al eje *RS*. (Figura 8, artículos 27-28).
- CASO 3. Cambia el eje y mantiene el origen: eje PERPENDICULAR al eje *RS* por el punto *A*. (Figura 9, artículos 29-30).
- CASO 4. Cambia el eje y mantiene el origen: el nuevo eje corta al eje *RS* por el punto *A* formando un ángulo cualquiera. (Figura 10, artículos 31-32).

- CASO 5. CASO GENERAL: Cambia el eje y el origen a una posición cualquiera. (Figura 11, artículos 33-35).

CASO 1. Cambia el origen de abscisas y mantiene el eje. (Fig. 7, art. 25-27).

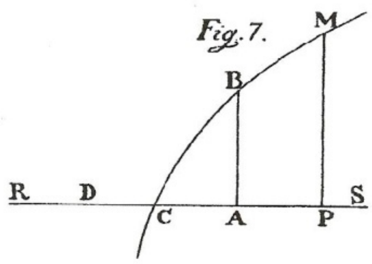


Figura 18

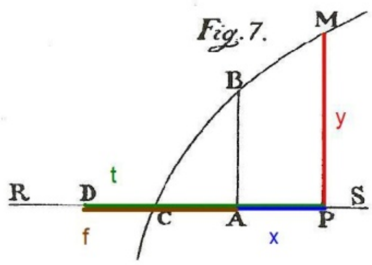
1.1. Dada una ecuación cualquiera entre *x* e *y*, fijando el eje *RS* y el origen de abscisas en el punto *A*, se describe la curva *CBM* (figura 18), en la que *x* representa la abscisa *AP* e *y* la aplicada *PM*.

1.2. Toma el punto *D* como el nuevo origen de abscisas.

1.3. Cambia la abscisa (*DP*) correspondiente al punto *M* de la curva, pero se mantiene la misma aplicada.

$$t = DP$$

1.4. Llamando *f* a la distancia de *A* a *D* y como $DP = DA + AP$, se tiene que $t = f + x$,



de donde se deduce que $x = t - f$

1.5. Y al sustituir en la ecuación *x* por esta expresión se obtiene la ecuación entre *t* e *y* buscada. Y como *f* es una magnitud arbitraria esta ecuación proporciona infinitas ecuaciones para una misma curva. Esta ecuación será pues la ecuación general de cambio de coordenadas al variar el origen.

> 25. Por consiguiente dada una ecuación cualquiera entre *x* e *y*, mediante la cual, después de haber tomado una recta *RS* para el eje, y el punto *A* para el origen de

abscisas, de manera que *x* representa la abscisa *AP*, e y la aplicada *PM*, se tiene descrita la curva *CBM*, cuya naturaleza por consiguiente está expresada por esta ecuación. Conservemos primero el mismo eje *RS*, y tomemos sobre este eje otro punto *D* para el origen de de abscisas, de manera que ahora al punto M de la curva le corresponde la abscisa *DP*, que supongo = *t*, la aplicada *MP* quedará la misma que antes e = *y*: buscamos una ecuación entre *t* e *y* propia para expresar la naturaleza de la curva *CBM*. Sea = *f* la distancia *AD*, que cae a la izquierda del punto *A* del lado de las abscisas negativas, se tendrá $DP = t = f + x$, por consiguiente $x = t - f$. Si en la ecuación dada entre *x* e *y* se sustituye para todo *x* por $t - f$, se tendrá una ecuación entre *t* e *y*, que representará la misma línea curva *CBM*, y como la magnitud $AD = f$ es arbitraria, se deduce que tenemos ya una infinidad de ecuaciones, que representan todas la misma curva. (Euler, 1797, t. II, p. 13)

CASO 2. Cambia el eje y el origen: eje PARALELO al eje RS. (Fig. 8, art. 27-28).

2.1. Comienza con la figura 19 en la que parte de la curva *LBM* descrita por medio de una ecuación dada, pero desconocida, entre *x* e *y*.

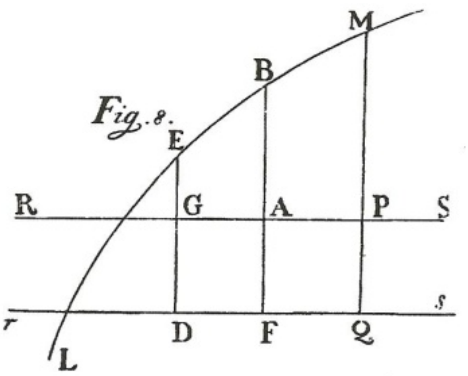


Figura 19

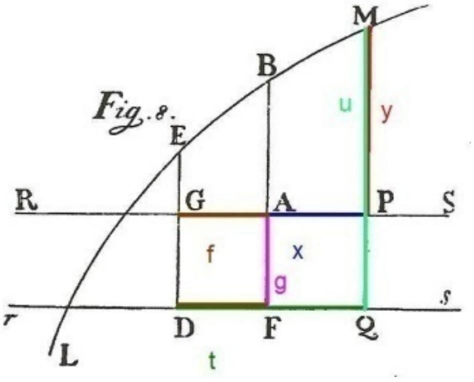
Toma como eje la recta *RS* y como origen de abscisas el punto *A*, de esta manera las coordenadas del punto *M* son $x = AP$ e $y = PM$.

2.2. Y quiere obtener las ecuaciones que le permitan expresar la curva *LBM* a partir de un nuevo eje paralelo al anterior, la recta *rs*. Pero al elegir un nuevo eje paralelo le obliga también a cambiar de origen de abscisas. Tomará como nuevo origen el punto *D*.

2.3. Llama $g = AF$ a la distancia del eje *rs* al eje *RS*, *f* a la longitud de los intervalos *DF* y *AG*, puesto que son iguales y; a las coordenadas del punto *M* respecto del nuevo eje (y origen) *t* a la abscisa *DQ* y *u* a la aplicada *QM*.

2.4. Como: $x = AP$; $y = PM$; $g = AF$; $f = AG = DF$; $t = DQ$; $u = QM$, se tiene que las coordenadas del punto M respecto del nuevo eje se pueden expresar como:

$$t = DF + FQ = f + x; \quad u = PM + PQ = g + y.$$



2.5. Y por tanto: $x = t - f$

$y = u - g$,

que son las ecuaciones que al sustituirlas en la ecuación dada entre x e y se obtiene la ecuación entre t y u que también expresa la naturaleza de la curva.

Dada la arbitrariedad de las magnitudes f y g, estas son las ecuaciones generales del cambio de coordenadas cuando se toma un eje paralelo.

CASO 3. Cambia el eje y mantiene el origen: eje PERPENDICULAR al eje RS por el punto A. (Fig. 9, art. 29-30).

3.1. Parte de la curva LM trazada en la figura 20.

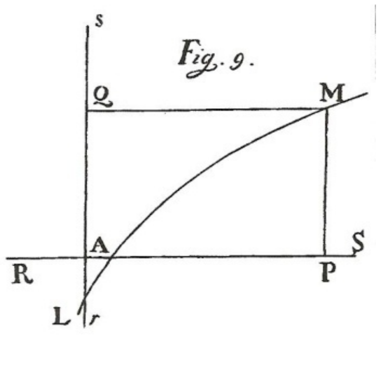


Figura 20

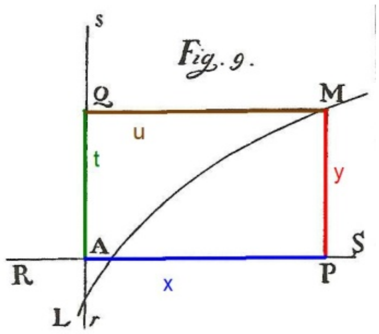
Las coordenadas del punto M respecto del eje RS son: la abscisa, $x = AP$ y la aplicada, $y = PM$.

3.2. Toma un eje perpendicular, la recta rs, al primero, la recta RS, y que lo corta por el origen de abscisas, el punto A. Luego mantiene fijo el origen.

3.3. Al trazar la perpendicular, *MQ*, desde el punto *M* al eje *rs* se obtienen las nuevas coordenadas del punto *M* respecto al eje *rs*. La nueva abscisa, *AQ* = *u*, y la nueva aplicada, *QM* = *t*.

3.4. Como *APMQ* es un paralelogramo rectángulo,

3.5. se tiene que: $x = u$ e $y = t$



son las ecuaciones del cambio de coordenadas, cuando se elige un nuevo eje perpendicular al primero por el origen de abscisas.

A la vista de los resultados de este cambio, Euler concluye que:

> no habrá para este nuevo eje ningún otro cambio en la ecuación, excepto que las coordenadas *x* e *y* se intercambian: es por eso que llamamos ordinariamente la abscisa y la aplicada las coordenadas, siendo indiferente cuál de las dos cantidades se toma como abscisa o como aplicada: porque una ecuación dada entre dos coordenadas *x* e *y*, resulta la misma curva, si se toma *x* o *y* para representar la abscisa. (Euler, 1797, t. II, p. 15)

CASO 4. Cambia el eje y mantiene el origen: el nuevo eje corta al eje RS por el punto A formando un ángulo cualquiera. (Fig. 10, art. 31-32).

4.1. Las coordenadas de un punto *M* de la curva *LM* respecto del eje *RS* de una ecuación entre *x* e *y* son: $x = AP$, $y = PM$.

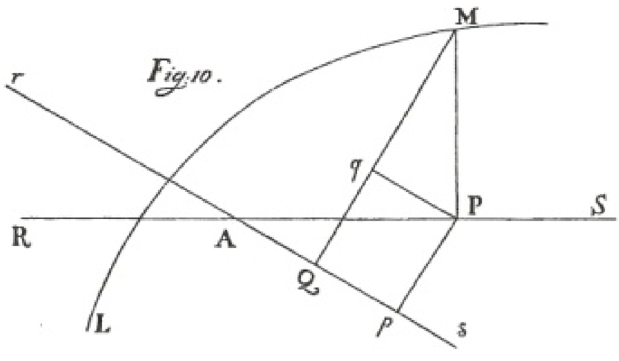


Figura 21

4.2. Analiza las ecuaciones del cambio de coordenadas al mantener el origen de abscisas y tomar un nuevo eje que corte al eje *RS* en el punto *A* formando un ángulo cualquiera con dicho eje.

4.3. Para encontrar la ecuación de la misma curva para el nuevo eje *rs*, traza la perpendicular desde *M* a la recta *rs*, y busca una ecuación entre la nueva abscisa $t = AQ$ y la nueva aplicada $MQ = u$.

4.4. Llama *q* al ángulo *SAs*, a su seno *m* y a su coseno *n* y nos recuerda que $mm+nn=1$. Traza desde el punto *P* las perpendiculares *Pp* y *Pq* sobre las nuevas coordenadas y como $AP = x$ obtiene las siguientes relaciones: $Pp = x \cdot \sin q$ y $Ap = x \cdot \cos q$.

Como el ángulo $PMQ = PAQ = q$ y $PM = y$ se obtiene:

$$Pq = Qp = y \cdot \sin q \quad \text{y} \quad Mq = y \cdot \cos q.$$

De todo ello deduce:

$$AQ = t = Ap - Qp = x \cdot \cos q - y \cdot \sin q$$

$$QM = u = Mq + Pp = y \cdot \cos q + y \cdot \sin q$$

Al sustituir sin*q* por *m* y cos*q* por *n*, estas ecuaciones quedan expresadas de la siguiente manera: $t = nx - my$

$u = mx + ny.$

4.5. Transforma estas expresiones utilizando la relación: $n^2 + m^2 = 1$ o su equivalente $\cos^2 q + \text{sen}^2\, q = 1$ para obtener las ecuaciones del cambio:

$$nt + mu = n^2x + m^2x = x$$

$$nu - mt = n^2y + m^2y = y.$$

Luego las ecuaciones generales del cambio de coordenadas, al cambiar el eje y mantener el origen de abscisas son:

$$x = nt + mu$$

$$y = nu - mt$$

O escritas de otra manera:
$$\left.\begin{array}{l} x = t \cdot \cos q + u \cdot \sin q \\ y = u \cdot \cos q - t \cdot \sin q \end{array}\right\}$$

CASO 5. CASO GENERAL: Cambia el eje a una posición cualquiera y el origen. (Fig. 11, art. 33-35).

Finalmente, después de estudiar cada uno de los casos particulares, obtiene las ecuaciones de cambio de coordenadas en general, es decir al cambiar el eje y el origen de abscisas a cualquier posición.

5.1. Las coordenadas de *M* respecto el eje *RS* y el origen *A* son: $x = AP$ e $y = PM$.

5.2. Toma un eje *rs* situado en una posición cualquiera y en él el punto *D* cómo nuevo origen de abscisas.

5.3. Trazar la perpendicular *MQ* desde el punto *M* a la recta *rs* y llama a la nueva abscisa $DQ = t$ y a la nueva aplicada $QM = u$.

5.4. Para encontrar la relación buscada traza desde el punto *D* dos líneas:

- primero la perpendicular al eje *RS* por y obtiene el punto *G*. Llama a $AG = f$ y a $DG = g$.
- Segundo la paralela al eje *RS* que corta a la prolongación de la aplicada *PM* en el punto *O*. Y obtiene: $MO = y + g$,

$$DO = GP = x + f$$

Llama *q* al ángulo *ODQ*, *m* a su seno y *n* a su coseno.

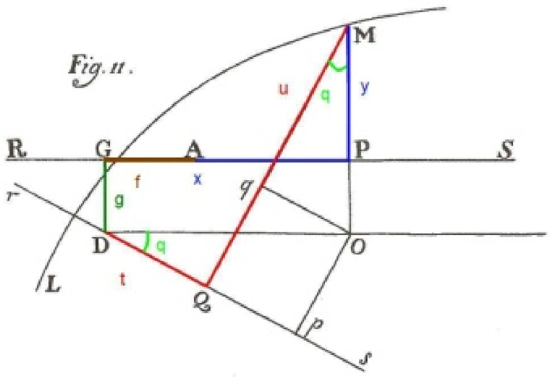


Figura 22

Traza sobre la aplicada *MQ* y el nuevo eje *DQ* sendas perpendiculares, *Oq* y *Op* y como el ángulo $OMQ = ODQ$, de $DO = x + f$, y de $MO = y + g$, se tiene que:

$$Op = Qq = (x + f)\sin q = mx + mf$$

$$Dp = (x + f)\cos q = nx + nf$$

Entonces, $Oq = Qp = (y + g) \sin q = my + mg$

$Mq = (y + g) \cos q = ny + ng$

Y por tanto, $DQ = t = [Dp - Qp] = nx + nf - my - mg$

$QM = u = [Qq + Mq] = mx + mf + ny + ng$

Es decir, $t = nx + nf - my - mg$

$u = mx + mf + ny + ng$

5.5. Para obtener las ecuaciones del cambio de coordenadas basta con hallar:

$$nt + mu = [nnx + nnf - nmy - nmg + mmx + mmf + mny + mng] = x + f$$

$$nu - mt = [nmx + nmf + nny + nng - mnx - mnf + mmy + mmg] = y + g$$

ya que $mm + nn = 1$

Y por tanto: $x = mu + nt - f$

$y = nu - mt - g$

son las ecuaciones buscadas. Las ecuaciones generales del cambio de coordenadas, al cambiar el eje y el origen de abscisas. Que podemos escribir de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} x = u \cdot \sin q + t \cdot \cos q - f \\ y = u \cdot \cos q - t \cdot \sin q - g \end{array}\right\}$$

A la ecuación que se obtiene entre t y u la llama ecuación general de la curva *LM*.

> 35. Ya que no podemos imaginar un eje *rs*, siempre y cuando esté en el mismo plano que la curva, que no esté incluido en esta última solución, no existirá para la misma curva *LM*, entre las coordenadas perpendiculares, ninguna ecuación, que no esté contenida en la que se ha encontrado entre t y u; y, como se puede variar de una infinidad de maneras las cantidades f y g, así como el ángulo q que determina m y n, se deduce que todas las ecuaciones, que están incluidas en la que acabamos de obtener de esta manera entre t y u, expresan la naturaleza de la misma curva. Es por eso que se suele llamar a esta ecuación entre t y u la ecuación general de la curva *LM*, porque contiene generalmente todas las que pertenecen a la misma curva. (Euler, 1797, t. II, p. 17)

Finalmente para saber si dos ecuaciones expresadas la una entre x e y, y la otra entre t y u, representan o no la misma curva será necesario encontrar los valores de las cantidades *f*, g, m y *n* que proporcionan las ecuaciones del cambio de coordenadas. Y muestra en un ejemplo cómo hacerlo.

> 36. Antes hemos dado a conocer que es difícil de juzgar, por la diversidad de algunas ecuaciones entre las coordenadas, si pertenecen a la misma curva o a curvas diferentes: se presenta ahora una manera de resolver este tipo de cuestiones. En efecto, sean propuestas dos ecuaciones, la una entre *x* e *y*, y la otra entre *t* y *u*, suponiendo en la primera $x = mu + ny - f$, e $y = nu - mt - g$, en la que *m* y *n* dependen mutuamente una de otra, de manera que $mm + nn = 1$, entonces habrá que ver si esta nueva ecuación entre *t* y *u* está incluida en la que ya tenemos, o si las cantidades *f*, *g* con *m* y *n* se pueden determinar de manera que se obtenga la otra ecuación entre *t* y *u*. Si se puede hacer, será una prueba que las dos ecuaciones expresan la misma línea curva, de otro modo, pertenecen a curvas diferentes. (Euler, 1797, t. II, p. 17)

El ejemplo que proporciona es averiguar si las ecuaciones:

$$yy - ax = 0$$

y

$$16u^2 - 24tu + 9t^2 - 55au + 10at = 0$$

pertenecen a la misma curva, aunque aparentemente sean muy diferentes entre ellas. Para ello hace diversas transformaciones para determinar las cantidades arbitrarias *f*, *g*, *m* y *n*, obteniendo los siguientes resultados: $\begin{cases} n = \dfrac{4}{5} \\ m = \dfrac{3}{5} \\ g = a \\ f = -a \end{cases}$ que muestran que las dos ecuaciones propuestas representan la misma curva.

Concluye esta parte del cambio de coordenadas perpendiculares manifestando que si las ecuaciones son de diferente orden expresan curvas distintas.

> 38. Así, cada vez que dos ecuaciones propuestas, una entre *x* e *y*, y otra entre *t* y *u*, no son del mismo orden, se podrá concluir, en el acto que las curvas que expresan son diferentes. Por lo tanto no puede haber ninguna duda para el caso en que las dos ecuaciones son del mismo orden, y entonces habrá que ayudarse del medio que acabamos de explicar: pero, como esta búsqueda es bastante penosa, cuando las ecuaciones son de un grado muy elevado, daremos a

> continuación reglas más eficaces, que harán juzgar en el acto de la variedad de curvas. (Euler, 1797, t. II, p. 19)

La obtención del cambio de coordenadas en los dos tratados de Lacroix es tan similar que nos limitaremos a recorrer el desarrollo que realiza en el tratado de trigonometría.

5.2.2. En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*:

Lacroix obtiene las ecuaciones del cambio, primero de forma general y posteriormente adecuándolas a todos los casos posibles de manera muy detallada y sistemática. Al contrario que Euler, empezará obteniendo las ecuaciones del cambio de coordenadas en el caso general y de éste las ecuaciones para los casos particulares. Para obtener las ecuaciones del cambio de coordenadas utiliza dos figuras: la 23 y la 24.

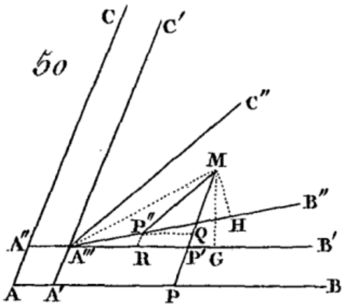


Figura 23

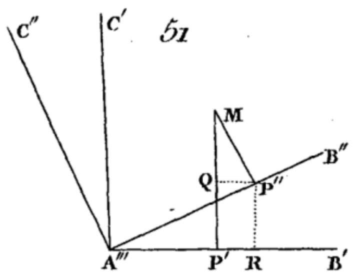


Figura 24

Resulta curioso observar que la obtención de las ecuaciones del cambio de coordenadas lo haga, al contrario de lo que había hecho anteriormente, desde el caso general a los casos particulares.

1. CASO GENERAL: Nuevo origen y nuevas direcciones.

Hasta este momento Lacroix solamente ha utilizado sistemas de coordenadas perpendiculares, a pesar de que había hecho explícito que los ejes de coordenadas no tenían porqué ser perpendiculares. Dado que esta es la primera vez en el texto en el que se va hacer uso de un sistema de coordenadas cuyos ejes no son perpendiculares necesita explicar que las coordenadas siguen siendo rectas paralelas a los ejes. Pues lo que Lacroix llama sistema de coordenadas hace referencia a la representación gráfica de las coordenadas, es decir a la representación de las coordenadas entendidas como líneas rectas (segmento) paralelas a los ejes.

Para analizar con detalle cómo obtiene las ecuaciones del cambio utilizaremos el término sistema de referencia al conjunto formado por el origen y los ejes, tal como lo entendemos en la actualidad; y mantendremos el término sistema de coordenadas tal como lo entiende Lacroix, es decir, la representación de las coordenadas de un punto respecto de un sistema de referencia.

> La mayor mudanza que puede ocurrir en un sistema de coordenadas, en el bien entendido que han de continuar siendo líneas rectas y respectivamente paralelas a dos líneas fijas, consiste en darles un nuevo origen y otras direcciones. Resolveremos desde luego este caso general, para lo cual supondremos que se quiera expresar los valores de las coordenadas *AP* = *x*, *PM* = *y*, fig. 50, referidas a los ejes *AB* y *AC*, por otras dos coordenadas *A'''P''* = *t*, *P''M* = *u*, referidas a los ejes *A'''B''*, *A'''C''*, cuya posición a los primeros se conoce. (Lacroix, 1820, p. 197).

Las coordenadas *x* e *y* ,del punto *M*, están referidas respecto del sistema de referencia formado por el punto *A* como origen y las rectas *AB* y *AC* como los ejes de abscisas y ordenadas respectivamente. De la misma manera sus coordenadas *t* y *u* están referidas al sistema formado por el punto *A'''* y los ejes *A'''B''* y *A'''C''*, cuya posición respecto del sistema de partida, $\{A, AB, AC\}$, se supone conocida.

Vemos en la figura 50 como las coordenadas son segmentos, de manera que la abscisa se representa en el eje de abscisas y la ordenada no se representa sobre su eje, sino que se sigue levantando a partir del extremo de la abscisa, de la misma manera que las aplicadas de Euler, aunque ahora no se trate de un sistema de referencia perpendicular.

Las coordenadas son distancias: *x* = *AP* *y* = *PM*

t = *A'''P''* *u* = *P''M*

Para obtener las ecuaciones del cambio utiliza un tercer sistema de referencia, el sistema $\{A''', A'''B', A'''C'\}$, en el que los ejes son paralelos a los del sistema de partida, y las distancias *AA'* y *A'A'''* se suponen conocidas, pues son respectivamente las coordenadas del punto A''' respecto del sistema de referencia de partida. Las representa por α y β, respectivamente.

$$\alpha = AA' \quad \beta = A'A'''$$

De lo anterior se deduce que:

$$AP = A'P + AA' = A'''P' + \alpha$$

$$PM = P'M + A'A''' = P'M + \beta$$

Al trazar los segmentos $P''Q$ y $P'R$ paralelos a AB y AC respectivamente (o a $A'''B'$ y A'''C' respectivamente) se obtiene los triángulos $A'''P''R$ y $P''MQ$ de los que se suponen conocidos todos sus ángulos y por tanto las relaciones entre sus lados homólogos. Haciendo

$$\frac{A'''R}{A'''P''} = m \qquad \frac{P''R}{A'''P''} = n$$

$$\frac{P''Q}{P''M} = p \qquad \frac{QM}{P''M} = q$$

se tiene:

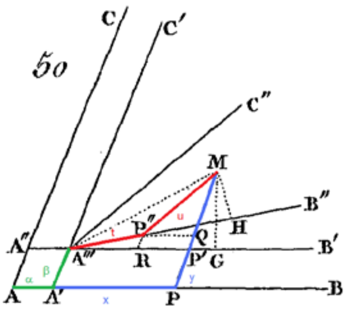
$$A'''R = mt \qquad P''R = nt$$

$$P''Q = pu \qquad QM = qu$$

y como

$$A'''P' = A'''R + RP' = A'''R + P''Q = mt + pu$$

$$P'M = P'Q + QM = P''R + QM = nt + qu$$



se deduce que

$$x = AP = A'P + AA' = A'''P' + \alpha = mt + pu + \alpha$$

$$y = PM = P'M + A'A''' = P'M + \beta = nt + qu + \beta$$

que son las ecuaciones generales del cambio de coordenadas, que tal como dice Lacroix:

> Estos son los valores más generales que pueden tener las coordenadas *x* e *y*, cualquiera que sea el ángulo que formen entre sí, cuando se las quiera expresar por otras coordenadas de la misma especie situadas como se quiera. (Lacroix, 1820, p. 198)

Más adelante examinará la relación que deben tener las cantidades *m, n, p* y *q* entre ellas.

2. CASOS PARTICULARES.

Del caso general se pueden deducir todos los casos particulares.

2.1. Nuevo origen y direcciones paralelas.

Si se toma como nuevo origen el punto *A’’’*, el eje *A’’’C’’* se confunde con el eje *A’’’C’* y el eje *A’’’B’’* con el eje *A’’’B’* y por tanto *A’’’P’’* se confunde con *A’’’P’* y *P’’M con P’M*, de manera que

$\frac{A'''R}{A'''P''} = m = 1$, pues *A’’’R* coincide con *A’’’P’’*

$\frac{P''R}{A'''P''} = n = 0$, pues *P’’R* = 0

$\frac{P''Q}{P''M} = p = 0$, pues *P’’Q* = 0

y $\frac{QM}{P''M} = q = 1$, pues *P’’M* coincide con *QM.*

Con lo que en este caso las ecuaciones del cambio de coordenadas son:

$x = t + \alpha,$

$y = u + \beta$

Si α = 0 o β = 0, se conserva el eje *AC* o bien el eje *AB.*

2.2. Mismo origen y nuevas direcciones.

En este caso α = 0 y β = 0, y por tanto

$x = mt + pu,$

$y = nt + qu$

Si además se elige el nuevo eje de abscisas paralelo al eje *AB*, es decir solo se cambia la dirección de las ordenadas, se tiene *m* =1, y *n* = 0 y por tanto las ecuaciones se transforman en

$x = t + pu,$

$y = qu$

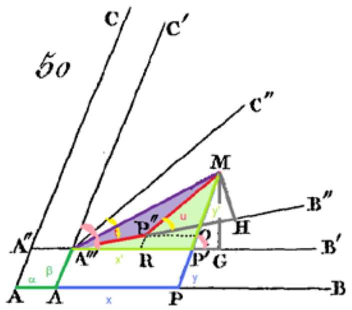
Si solo cambia la dirección de las abscisas, se tiene $p = 0$ y $q = 1$ y resultará

$x = mt,$

$y = nt + u$

2.3. Ejes perpendiculares en los dos sistemas de referencia.

Antes de abordar este caso, analiza la relación que deben satisfacer las cantidades *m*, *n*, *p* y *q*.



Trazando desde el punto *M* las rectas *MG* y *MH* respectivamente perpendiculares a *A’’’B’* y *A’’’B’’* y suponiendo conocidos los ángulos *MP’B’* = *C’A’’’B’* (marcados en rosa) y *MP’’B’’* = *C’’A’’’B’’* (en amarillo); haciendo:

$$g = \frac{P'G}{P'M}$$

$$h = \frac{P''H}{P''M}$$

tirando después la recta *A’’’M* y representando *A’’’P’* por *x’* y *P’M* por *y’*, se obtienen los triángulos *A’’’P’M* y *A’’’P’’M*, en los que se cumple:

$$\overline{A'''M}^2 = \overline{A'''P'}^2 + \overline{P'M}^2 + 2\,\overline{A'''P'} \times \overline{P'G} = x'^2 + y'^2 + 2gx'y'$$

$$\overline{A'''M}^2 = \overline{A'''P''}^2 + \overline{P''M}^2 + 2\,\overline{A'''P''} \times \overline{P''H} = t^2 + u^2 + 2htu$$

E igualando ambas expresiones se obtiene:

$$x'^2 + y'^2 + 2gx'y' = t^2 + u^2 + 2htu$$

Dado que $x' = mt + pu$ e $y' = nt + qu$, se tiene:

$$(m^2 + n^2 + 2gmn)t^2 + (p^2 + q^2 + 2gpq)u^2 + \ 2[mp + nq + g(np + mq)]tu =$$

$$t^2 + u^2 + 2htu$$

De la que se obtienen las tres condiciones siguientes:

$$m^2 + n^2 + 2gmn = 1$$

$$p^2 + q^2 + 2gpq = 1$$

$$mp + nq + g(np + mq) = h$$

Eliminando g de las dos primeras se obtiene:

$$(m^2 + n^2)pq - (p^2 + q^2)mn = pq - mn$$

que expresa las condiciones que deben satisfacer las cantidades *m, n, p* y *q*.

Según Lacroix el caso de cambio de coordenadas con ejes perpendiculares en ambos sistemas de referencia es el más frecuente y en él las ecuaciones del cambio de coordenadas se simplifican mucho.

Los ángulos *MP'B'* y *MP''B''* devienen rectos y las líneas *P'G* o *gy'* y *P''H* o *hu* desaparecen; de modo que las expresiones

$$m^2 + n^2 + 2gmn = 1$$

$$p^2 + q^2 + 2gpq = 1$$

$$mp + nq + g(np + mq) = h$$

se quedan en

$$m^2 + n^2 = 1$$

$$p^2 + q^2 = 1$$

$$mp + nq = 0$$

de donde sale

$$m^2 = 1 - n^2$$

$$p^2 = 1 - q^2$$

$$m^2p^2 = 1 - n^2 - q^2 + n^2q^2$$

y como

$$mp = nq,$$

sale

$$n^2 + q^2 = 1$$

que comparándola con

$$m^2 + n^2 = 1$$

se obtiene

$$q = m$$

y por tanto

$$p = -n.$$

Con todo ello, las ecuaciones de cambio de coordenadas quedan de la siguiente manera:

$$x' = mt - un,$$

$$y' = nt + mu.$$

La figura 24, construida para este caso particular muestra que *m* es el coseno del ángulo *B'A'''B''*, y que *n* es su seno.

Basta recordar la definición de *m* y *n*.

$$\frac{A'''R}{A'''P''} = m$$

$$\frac{P''R}{A'''P''} = n$$

Y por tanto, se tiene la siguiente expresión de las coordenadas del cambio de coordenadas cuando los dos sistemas de referencia son perpendiculares.

$$A'''P' = A'''R - P''Q = mt - nu$$

$$P'M = P''R + QM = nt + mu$$

5.3. Resumen.

Para los dos autores, curvas diferentes dan lugar a ecuaciones diferentes, pero ecuaciones diferentes, dada la arbitrariedad del eje (o de los ejes) y el origen de abscisas (o de coordenadas), no tienen por qué dar origen a curvas diferentes. Para determinar qué ecuaciones están asociadas a una misma curva (función) es necesario obtener las ecuaciones de cambio de coordenadas.

Mientras que Euler, que hasta este momento había estado dando definiciones generales, estudia primero los casos particulares para finalizar con el caso general, Lacroix hace lo contrario de lo que había hecho hasta este momento en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*, esto es, hasta la obtención de las ecuaciones del cambio de coordenadas siempre había utilizado muchos ejemplos previos, en cambio para obtener estas ecuaciones empieza por desarrollar el caso más general del que deduce todos los casos particulares.

Además de este cambio en las características generales de sus respectivos tratados, la diferencia entre ambos autores radica fundamentalmente en el uso de los dos ejes absolutos en el caso de Lacroix frente al único eje de Euler, ya que los dos utilizan las construcciones geométricas para la obtención de las ecuaciones de cambio de coordenadas.

Lacroix obtiene las ecuaciones después del estudio de la recta, sin embargo Euler deduce la ecuación general de la recta a partir de las ecuaciones del cambio de coordenadas.

6. EXAMEN EN DETALLE DE UN CASO: ECUACIÓN DE LA RECTA

6.1. De la ecuación general del cambio de coordenadas a la ecuación general de la recta. Euler.

En la *Introductio,* Euler utiliza el cambio de coordenadas para encontrar la ecuación general de la recta. Dedica para ello los artículos 39, 40 y 41, y utiliza dos figuras, la 12 y la 13.

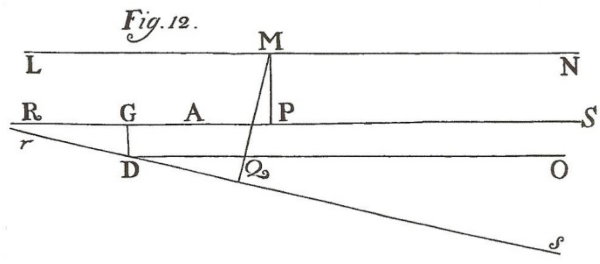


Figura 25

Empieza considerando una línea recta *LM* paralela al eje *RS*, en la que se observa que la aplicada *PM* siempre es una magnitud constante, independientemente de donde se sitúe el origen de abscisas.

Llama a dicha magnitud *a* y por consiguiente la ecuación de la recta paralela al eje *RS* es:

$$y = a$$

Para obtener la ecuación general de la recta cambia el eje *RS* por el eje *rs* y aplica todo lo expuesto respecto al cambio de coordenadas de la siguiente manera.

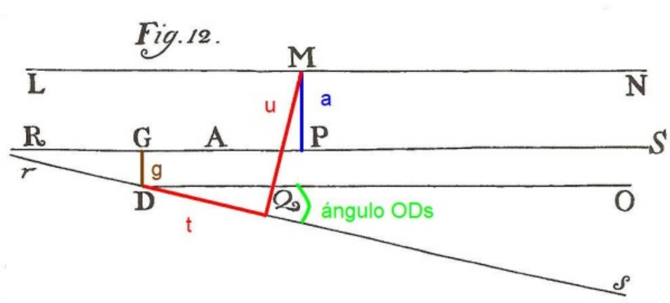
Llama $DG = g$,

seno del ángulo $ODs = m$,

coseno del ángulo $ODs = n$,

la abscisa $DQ = t$, y

la aplicada $MQ = u$



Como según las ecuaciones de cambio de coordenadas $y = nu - mt - g$ y por otra parte $y = a$, se tiene que la ecuación general de la recta es:

$$nu - mt - g - a = 0$$

Multiplica esta ecuación por una constante, *k*, y supone:

$$nk = \alpha$$

$$mk = -\beta$$

$$(g + a)\, k = -b$$

Y entonces obtiene la ecuación $\alpha u + \beta t + b = 0$ para la línea recta.

Como es la ecuación general de primer orden entre u y t, queda probado que ninguna ecuación de primer orden entre sus dos coordenadas representa una línea curva, sino una recta. Luego la ecuación general de la recta es $\alpha u + \beta t + b = 0$**.**

Acto seguido da la ecuación general de una recta cualquiera LN (figura 26) respecto del eje RS:

$$\alpha x + \beta y - a = 0$$

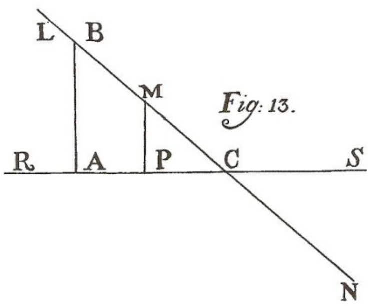


Figura 26

Halla las coordenadas de los puntos C y B, lo que para nosotros serían los puntos de corte con los ejes.

Primero toma $y = 0$, entonces la abscisa AC deviene $= \dfrac{a}{\alpha}$

Luego $x = 0$, entonces $y = \dfrac{a}{\beta}$, que es el valor de la aplicada AB en el origen de abscisas; lo que para nosotros es la ordenada en el origen.

Finalmente comprueba, por semejanza de triángulos, que cualquier punto de la recta BC satisface la ecuación dada.

Elije el punto M, cuyas coordenadas son $x = AP$ e $y = MP$; y los triángulos semejantes CPM y CAB cuya razón de semejanza es $CP : PM :: CA : AB$

Como $\mathrm{CP} = \mathrm{AC} - \mathrm{AP} = \dfrac{a}{\alpha} - x$

PM = y

CA = $\frac{a}{\alpha}$

AB = $\frac{a}{\beta}$

Entonces $\frac{a}{\alpha} - x$: y :: $\frac{a}{\alpha}$: $\frac{a}{\beta}$ o $\dfrac{\frac{a}{\alpha} - x}{y} = \dfrac{\frac{a}{\alpha}}{\frac{a}{\beta}}$

De donde se deduce: $\frac{ay}{\alpha} = \frac{a^2}{\alpha\beta} - \frac{ax}{\beta}$

Que multiplicando por $\frac{\alpha\beta}{a}$ se obtiene: $\beta y = a - \alpha x$ o $\alpha x + \beta y = a$,

que es la ecuación propuesta:

$$\alpha x + \beta y - a = 0$$

Para terminar estudia los siguientes casos particulares:

1º. Si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, la construcción no puede llevarse a cabo.

2º. Si $\alpha = 0$ e $y = a$, la línea es una recta paralela al eje.

3º. Si $\alpha = a = 0$, la recta paralela se confundirá con el eje.

4ª. Si $\beta = 0$ y $x = a$, es evidente que la línea que satisface la ecuación es una recta perpendicular al eje, en este caso no hay más que una abscisa para todas las aplicadas. La abscisa deja de ser una cantidad variable.

El caso $\beta = x = 0$ no lo contempla, pues para Euler no cabe hacer distinciones entre las diferentes rectas perpendiculares que se pueden obtener, lo cual demuestra que él sólo considera el eje de abscisas y no sólo teóricamente sino en la práctica.

Euler considera que la recta ya es lo suficientemente conocida en su época y no le dedica un estudio profundo. En cambio, Lacroix realiza un estudio amplio y detallado sobre la recta en el plano.

6.2. De la ecuación general de la recta al cambio de coordenadas. Lacroix.

En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie,* Lacroix hace un estudio sistemático que incluye los siguientes puntos:

1º. Ecuación general de la ecuación de la recta, $y = ax + b$, para valores positivos de las incógnitas.

2º. Interpretación de la constante a.

3º. Condición de paralelismo.

4º. Corte con el eje de ordenadas.

5º. Ecuación general de la ecuación de la recta, $y = ax + b$, para valores negativos de las incógnitas.

6º. Corte con el eje de abscisas.

7º. Ecuación general de la recta.

8º. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

9º. Ecuación de la recta que pasa por un punto dado y que forma un ángulo cualquiera con el eje de las x.

10º. Distancia entre dos puntos. Longitud de un segmento de la recta.

11º. Ecuación de la recta paralela a una recta dada y que pasa por un punto dado.

12º. Condición de perpendicularidad.

13º. Intersección de dos rectas.

14º. Distancia de un punto a una recta.

15º. Ángulo entre dos rectas.

1º. Ecuación general de la ecuación de la recta $y = ax + b$ para valores positivos de las incógnitas.

> De todas las ecuaciones entre dos indeterminadas la más simple es la del primer grado, ella pertenece a la línea recta, la más simple de todas las líneas. Esta ecuación puede representarse por $Cy = Ax + B$; pero dividiéndola por C no perderá nada de su generalidad, y se mudará en $y = \frac{A}{C}x + \frac{B}{C}$, o $y = ax + b$, con

sólo hacer $\frac{A}{C} = a$, $\frac{B}{C} = b$: es bajo la forma $y = ax + b$, bajo la cual la emplearemos siempre. (Lacroix, 1807, p. 122)

Aunque pudiésemos pensar que la generalidad de la ecuación $y = ax + b$ es tal como la entendemos en la actualidad no es del todo cierto, puesto que tanto las incógnitas como las constantes representan exclusivamente cantidades positivas. Veremos más adelante que cuando se quiere dar a la incógnita *x* valores negativos, la ecuación se transforma en $y = -ax + b$.

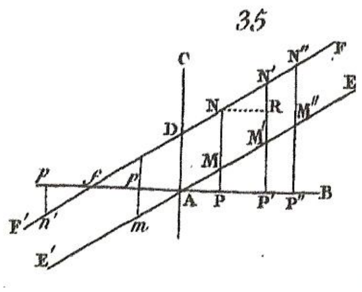
2º. Interpretación de la constante a.

Supongamos que *b* es nula, se tendrá

$$y = ax, \text{ o } \frac{y}{x} = a;$$

esto es, que en toda la extensión de la recta, la razón de *PM* a *AP*, fig.35, será constante. Esta propiedad, que no es otra cosa que la expresión de la semejanza de los triángulos *APM*, *AP'M,'* etc., y de la cual resulta $\frac{PM}{AP} = \frac{P'M'}{A'P'}$ cualquiera que sea el sitio en que se tomen los puntos P, P', etc., sobre la línea recta *AE*, tirada por el punto *A* origen de coordenadas.

La relación $\frac{y}{x}$ o el coeficiente *a*, depende del ángulo que forma la recta *AE* con el eje *AB* de las abscisas; y como en el triángulo *APM*, se supone rectángulo en *P*, la razón de *PM* a *AP* es igual a la tangente del ángulo *PAM* (30), resulta que *a* expresa la tangente de este ángulo. (Lacroix, 1807, p. 122)



Es necesario señalar que cuando dice toda la extensión de la recta *y = ax* se refiere al segmento *AE*. Lo mismo ocurre cuando se refiere al eje de abscisas *AB*, pues en realidad lo que tiene en consideración es el segmento *AB*. Esto implica que las distancias *AP* y *PM* o sus correspondientes valores *x* e *y*, no sólo son positivos, sino que tiene además son menores que las distancia *AB* y *AE* respectivamente. Luego la interpretación de la constante *a*, de momento sólo es válida para el segmento *AE*. La lectura de este párrafo descontextualizado nos podría conducir a pensar que el análisis de la constante a y por tanto de la ecuación $y = ax$ se realiza para todos los valores posibles de la incógnita *x*, pero de momento solamente puede tomar los valores señalados.

Por tanto podemos concluir que en el marco de estas limitaciones a expresa la tangente del ángulo *APM*, independientemente del punto *P* elegido.

3º. Condición de paralelismo.

> Considerando la ecuación $y = ax + b$ se observa que la nueva ordenada y no difiere de la primera $y = ax$, más que en que aquella excede a ésta en la cantidad *b*; de lo cual se infiere que si se toma *AD* = *b*, y que se tire la línea *DF* paralela a *AE*, ella será el lugar de la ecuación $y = ax + b$, puesto que se tendrá
>
> $$PN = PM + MN = PM + AD$$
>
> $$P'N' = P'M' + M'N' = P'M' + AD, \text{ etc.;}$$
>
> Es preciso notar que el coeficiente *a* quedará el mismo para todas las rectas paralelas a *AE*. (Lacroix, 1807, pp. 122-123)

Si nos fijamos en la figura 35 en la cual se sustenta el texto, apreciamos que lo que se ha construido por paralelismo es el segmento *DF*. Además la constante *b* solamente puede ser leída como una cantidad positiva. Si por el momento solamente están construidos los segmentos *AE* y *DF*, será necesario justificar la prolongación de dichos segmentos para obtener la recta en su totalidad. Lacroix lo hace de forma progresiva, primero para valores de *x* e *y* tan grandes como se quiera, pero por supuesto positivos; lo cual implica que el cuadrante *BAC* es ilimitado. Posteriormente, establecerá la prolongación para valores negativos de *x*.

> Es fácil ver que en la ecuación $y = ax + b$ no hay cosa alguna que limite los valores que pueden atribuirse a *x*, y que por lo mismo los de *y* podrán ser tan grandes como se quiera; pero al mismo tiempo nada hay que limite el curso de la línea *DF* en el espacio indefinido *BAC*, luego siempre habrá abscisas y ordenadas suficientemente grandes para representar los valores de *y* y de *x*, que satisfarán la ecuación propuesta. (Lacroix, 1807, p. 123)

4º. Corte con el eje de ordenadas.

> Haciendo $x = 0$ se tendrá $y = b$, y este valor pertenecerá al punto *D*, en el cual la recta *DF* encuentra al eje *AC* de las ordenadas. (Lacroix, 1807, p. 123)

Aunque las coordenadas del punto *D* no tengan el formato actual como par ordenado, observamos que el concepto y la forma de calcular la ordenada en el origen se realiza de tal como lo hacemos en la actualidad, siempre y cuando tengamos presente que de momento se está trabajando con la semirrecta *DF*, que además no se trata de cualquier semirrecta, sino una semirrecta situada en lo que nosotros llamamos primer cuadrante.

5º. Ecuación general de la ecuación de la recta $y = ax + b$ para valores negativos de las incógnitas.

> Cuando *x* sea negativa, se hallará
>
> $$y = -ax + b,$$
>
> de la cual se infiere que si *ax* fuese menor que *b*, aún sería *y* positiva, pero menor que *b* o *AD*. El curso de la línea *DF* manifiesta que esta circunstancia no puede verificarse sino en la parte *DF'* correspondientes a las abscisas *Ap*[38], situadas en el lado opuesto a las abscisas *AP*[39], que se habían escogido para representar los valores positivos de *x*; es pues por este lado *DF'* por el que deben tomarse los valores negativos de *x*. (Lacroix, 1820, p. 141)

> Faisant $x = o$, on aura $y = b$, et cette valeur appartiendra au point D, où la droite DF rencontre l'axe AC des ordonnées. Lorsque x sera négatif, on trouvera
>
> $$y = -ax + b,$$
>
> et ax étant moindre que b, y sera encore positif, mais moindre que b ou AD. Le cours de la ligne DF montre que cette circonstance ne peut avoir lieu que dans la partie DF', correspondante à des abscisses Ap, situées du côté opposé aux abscisses AP, que j'avais choisies pour représenter les valeurs positives de x; c'est donc de ce côté qu'il faut prendre les valeurs négatives de x.

(Lacroix, 1807, p. 123)

Luego la ecuación general de la recta será $y = ax + b$, si *x* es positiva; pero $y = -ax + b$, si *x* es negativa. Por tanto, cuando se hace referencia a que las incógnitas pueden tomar cualquier valor, dicho valor es siempre positivo. Pero además, las abscisas que representan dichos valores se trasladan a la gráfica de la misma forma que en el texto de Euler; y no sólo eso sino que utiliza la misma tipografía de las letras, es decir, si la

[38] En la traducción aparece *AP* en lugar de *Ap*
[39] Esta frase no aparece en la traducción.

abscisa representa un valor positivo de la incógnita *x*, se representa a la derecha del origen de coordenadas y se simboliza por *AP*; si la abscisa representa un valor negativo de *x*, se representa la izquierda del origen de coordenadas y se simboliza por *Ap*.

Al dar a *x* valores negativos, la semirrecta *DF* se prolonga con la semirrecta *DF'*, obteniendo de esta manera la recta en su totalidad. Anteriormente había justificado que *x* puede tomar valores tan grandes como se quiera, por tanto si ahora estos valores son negativos lo que se obtiene ya no es el segmento *DF'* sino la semirrecta *DF'*, aunque no se justifique explícitamente en el texto de Lacroix que los valores negativos de *x* puedan tomar valores tan pequeños como se quiera. Por dos razones, la primera porque los valores negativos son iguales que los positivos pero afectados del signo menos, ya que la distancia que representan es la misma y lo único que varía es dónde se representa; y segundo, porque en este contexto no tiene sentido hablar de valores de *x* tan pequeños como se quiera puesto que dichos valores representan distancias y lo que se pretende es tomarlas tan grandes como se quiera para representar la recta en su totalidad.

6º. Corte con el eje de abscisas.

Pour trouver la valeur de x, qui répond au point f où la ligne DF rencontre l'axe AB des abscisses, il faut faire $y = o$, ce qui donne

$$ax + b = o, \quad \text{et} \quad x = -\frac{b}{a} = Af.$$

Para hallar el valor de *x* correspondiente al punto *f* en que la línea *DF* encuentra al eje *AB* de las abscisas, debe hacerse $y = 0$, lo cual da

$$ax + b = 0, \text{ y } x = -\frac{b}{a} = Af.$$

(Lacroix, 1807, p. 123)

Lorsque x, restant toujours négatif, sera devenu plus grand que la quantité $\frac{b}{a}$, y lui-même deviendra négatif; mais au-delà du point f, la ligne DF se trouve au-dessous de la ligne AB : l'ordonnée $p'n'$ tombera donc d'un côté opposé à celui où elle était située d'abord, et par conséquent les valeurs négatives de y doivent se porter d'un côté de la ligne AB, opposé à celui qu'on a adopté pour les valeurs positives.

> Cuando permaneciendo negativo el valor de *x*, este sea mayor que $\frac{b}{a}$, el mismo valor de *y* será negativo; y como pasado el punto *f*, la línea *DF* se halla por la parte inferior de la línea *AB*, resulta que la ordenada *p'n'* caerá de un lado opuesto a aquel en que ella está situada desde luego; y por consiguiente los valores negativos de *y* deben llevarse de un lado de la línea *AB*, opuesto a aquel que se ha adoptado para los valores positivos. (Lacroix, 1807, pp. 123-124)

La primera observación que debemos realizar corresponde a la justificación del valor negativo de la abscisa del punto de corte con el eje *AB* de las abscisas. Las cantidades *a* y b son positivas y por tanto $-\frac{b}{a}$ es negativo. Por esta razón Lacroix obtiene las coordenadas de dicho punto después de explicar cómo representar en la recta los puntos que se obtiene cuando la *x* toma valores negativos. Este hecho vuelve a confirmar que la ecuación de la recta $y = ax + b$ no es la ecuación general, solamente es la ecuación general de la recta para valores positivos tanto de las incógnitas como de las cantidades constantes a y *b*.

En este marco (figura 8), los puntos situados a la izquierda del corte con el eje de abscisas los valores de la ordenada efectivamente son negativos y vuelve a justificar dónde se deben representar y por qué. Pero es importante notar que llama ordenada al segmento *p'n'*, lo cual nos vuelve a recordar las aplicadas de Euler no sólo por la notación, sino porque no hace uso del eje de ordenadas, la ordenada se obtiene tirando la perpendicular desde la abscisa.

Podemos acabar esta parte afirmando que la mayor dificultad, en este momento de la enseñanza de las matemáticas respecto la representación gráfica de funciones o de lugares geométricos, estriba en el uso de las cantidades negativas en la representación gráfica de las líneas curvas. Por ello, cada vez que Lacroix necesita representar un valor negativo explica detalladamente cómo y dónde se debe ubicar. Pero además advierte que la forma de las figuras depende en gran parte del uso de las cantidades negativas. Dicho de otro modo, la forma de una línea curva (la gráfica de una función) depende tanto de los valores positivos como negativos de las incógnitas, no se puede obtener la forma completa de una línea sino se utilizan las cantidades negativas.

> Estas observaciones, que confirman lo que se ha dicho en el núm. 76, no son particulares a la línea recta. Ellas son muy interesantes, porque las diversas formas que toman las líneas curvas dependen en gran parte del uso de las cantidades negativas en las figuras. (Lacroix, 1807, p. 124)

7º. Ecuación general de la recta.

En la ecuación general de la recta $y = ax + b$, con las limitaciones comentadas anteriormente, solamente aparecen dos constantes a y b, de lo que se infiere que bastan dos condiciones para determinar una recta. En los siguientes puntos analiza, la recta que pasa por dos puntos, la recta paralela o perpendicular a una recta dada y que pasa por un punto.

8º. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

En este caso obtiene la ecuación de forma analítica.

Si α y α' son las abscisa, y β y β' las ordenadas, la ecuación $y = ax + b$ da lugar a las dos ecuaciones siguientes

$$\beta = \alpha x + b \text{ y } \beta' = \alpha' x + b$$

de las que se obtiene

$$a = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}$$

$$b = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$$

y por tanto

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$$

que es la ecuación buscada.

9º. Ecuación de la recta que pasa por un punto dado y que forma un ángulo cualquiera con el eje de las x.

Pero al resultado anterior se le puede dar una forma más simple si se restan las ecuaciones $y = ax + b$ y una cualquiera de estas: $\beta = \alpha x + b$ o $\beta' = \alpha' x + b$.

Se obtiene entonces la ecuación:

$$y - \beta = a(x - \alpha)$$

que es la ecuación de una recta que pasa por un punto dado de coordenadas α y β, y que forma con el eje de las *x* un ángulo cualquiera. Sustituyendo a por su valor, esta ecuación se expresa de la forma

$$y-\beta=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha)$$

Al eje *AB* de las abscisas lo llama de repente el eje de las *x* sin hacer ningún comentario al respecto ni darle la mayor importancia en el texto. Pero es evidente que el cambio en el nombre es fundamental, puesto que hasta este momento había utilizado la *x* exclusivamente para designar la incógnita, que puede tomar cualquier valor, incluso negativo; en cambio las abscisas eran distancias que se representaban en el eje de abscisas a un lado u otro del origen según si representaban valores positivos o negativos de la incógnita.

Obtiene esta ecuación, igual que la anterior de un modo analítico, solamente cuando define distancia entre dos puntos acude a la figura 35.

10º. Distancia entre dos puntos. Longitud de un segmento de la recta.

Suponiendo que *N* y *N'* (figura 35) representan los puntos de coordenadas α y β y α' y β' que se han utilizado para obtener la ecuación de la recta anterior, su distancia o la longitud de la parte de la recta que interceptan (longitud del segmento) vendrá expresada por

$$\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}$$

ya que la distancia *NN'* es la hipotenusa del triángulo rectángulo *NRN'* en el cual se verifica:

$$\overline{NN'}^2=\overline{NR}^2+\overline{N'R}^2=(\mathrm{AP'}-\mathrm{AP})^2+(\mathrm{P'N'}-\mathrm{PN})^2$$

Por tanto la fórmula que permite calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera, aunque necesita para su justificación representar la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos[40], solamente depende de sus coordenadas:

$$NN'=\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}$$

11º. Ecuación de la recta paralela a una recta dada y que pasa por un punto.

Para dar la ecuación de la recta paralela por un punto dado, utiliza los resultados obtenidos anteriormente: la interpretación de la constante *a* (analizado en el segundo punto), la condición de paralelismo (en el tercero) y la ecuación obtenida en el noveno punto.

[40] Concepto de distancia como la distancia más corta según la línea recta. Revisar si había definido distancia.

Para obtener la ecuación de la recta paralela a la recta representada por la ecuación $y = a'x + b$ y que pase por el punto de coordenadas α y β, bastara sustituir en la ecuación

$$y - \beta = a(x - \alpha)$$

que pasa por el punto pedido, a por *a'*, con lo que se tendrá

$$y - \beta = a'(x - \alpha)$$

que es la ecuación que cumple, además de pasar por el punto dado, la condición de paralelismo pedida, pues el coeficiente de *x* es el mismo en las dos ecuaciones que representan las rectas paralelas.

12º. Condición de perpendicularidad.

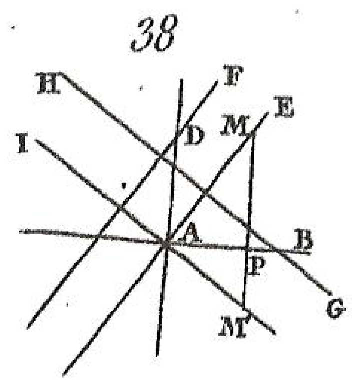


Figura 27

En la figura 27, *AE y AI* representan dos rectas perpendiculares entre sí que pasan por el origen de coordenadas.

Sobre la abscisa *AP* se levantan dos ordenadas *PM* y *PM'* que proporcionan dos triángulos rectángulos *APM* y *APM*' de los que se deduce que la razón *AP*: *PM* es inversa a la razón *AP*: *PM*'. Por lo que si *a* es el coeficiente de *x* en la ecuación de la recta *AE*, entonces $\frac{1}{a}$ será el coeficiente en valor absoluto de *x* en la ecuación de la recta *AI*. Como además las ordenadas de *AI* están situadas por debajo del eje de abscisas, estarán afectadas por el signo $-$, por tanto las ecuaciones de las rectas perpendiculares que concurren en el origen de coordenadas serán:

$y = ax$ (recta *AE)* e $y = -\frac{1}{a}x$ (recta *AI*)

Ecuaciones sobre las que Lacroix incluye la siguiente nota en la que justifica como llegar a estas ecuaciones:

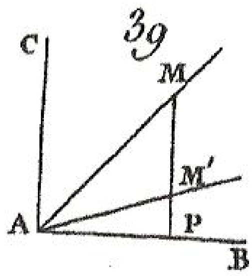


Figura 28

…la inclinación de las dos rectas *AM* y *AM*', fig. 39, que pasan por el origen determinan la forma del triángulo comprendido entre los puntos *M* y *M*' correspondientes a la misma abscisa *AP* y el origen *A*; en este triángulo es fácil calcular sus lados por las ecuaciones de estas rectas, que suponemos sean

$$y = ax,\ \ y = a'x.$$

En efecto, si *AP* = *x*, se tendrá *PM* = *ax*, *PM*' =*a*'*x*,

$$MM' = PM - PM' = ax - a'x;$$

y los triángulos *APM*, *APM*' darán

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2 = x^2 + a^2x^2$$

$$\overline{AM'}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM'}^2 = x^2 + a'^2x^2;$$

Además cuando estas rectas sean perpendiculares entre sí, el triángulo *MAM*' será rectángulo en *A*; *MM*', que en tal caso es hipotenusa, deberá satisfacer a la ecuación

$$\overline{MM'}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AM'}^2$$

De la cual, sustituidos los valores de $\overline{MM'}^2$, $\overline{AM}^2$, $\overline{AM'}^2$ se infiere

$$(ax - a'x)^2 = 2x^2 + a^2x^2 + a'^2x^2.$$

Si se desenvuelve reduce y divide por $2x^2$, la ecuación anterior se muda en $-aa' = 1$, de donde se concluye $a' = -\frac{1}{a}$, como antes.

Es bueno observar que el signo – indica la mudanza que debe experimentar la figura cuando el ángulo *MAM*' viene a ser recto, circunstancia que no permite que las dos líneas *AM* y *AM*' estén del mismo lado del eje *AB*, así como se había supuesto al principio: el álgebra hace sobre la situación de estas líneas una corrección análoga a la que se verifica para las soluciones negativas en las cuestiones numéricas. (Véase los *Elementos de Álgebra*). (Lacroix, 1807, pp. 126-127)

También obtiene la ecuación general de la recta perpendicular a otra dada, es decir sin tener que concurrir en el origen de coordenadas. Considera las rectas *DF* y *GH* respectivamente paralelas a las rectas *AE* y *AI* (figura 27) y por tanto perpendiculares entre ellas; teniendo en cuenta la condición de paralelismo se deduce que sus ecuaciones serán

$y = ax + b$ (recta *DF)* e $y = -\frac{1}{a}x + b'$ (recta *GH*)

En el caso en que la recta *GH* pase por un punto cuyas coordenadas fuesen α y β, su ecuación sería, atendiendo a los puntos que ha desarrollado previamente:

$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha).$$

13º. Intersección de dos rectas.

Lacroix describe la intersección de dos rectas (a las que él sigue llamando líneas) tal como lo hacemos en la actualidad. El punto de intersección de dos rectas deben tener las mismas coordenadas por ello si las ecuaciones de las rectas son $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$, las incógnitas x e y deben de tener el mismo valor en ambas ecuaciones y por tanto

$$ax + b = a'x + b'$$

de donde se deduce que los valores de las coordenadas son

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}$$

$$y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}$$

Coordenadas sobre las que Lacroix añade:

1º. Cuanto menor es la cantidad $a' - a$ más distante de los ejes se encuentra el punto de intersección.

2º. x e y resultan infinitas cuando $a' - a = 0$ o $a' = a$; es decir, cuando las rectas son paralelas.

Esto es, no se limita a obtener las coordenadas del punto de intersección por métodos analíticos, sino que además interpreta geométricamente el valor de las coordenadas.

14º. Distancia de un punto a una recta.

Deduce la fórmula de la distancia de un punto a una recta a partir de la longitud del segmento perpendicular desde el punto dado hasta el punto de intersección entre la perpendicular y la recta dada. Si el punto dado tiene por coordenadas α y β; y el punto de intersección α' y β' la distancia es $\sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2}$ (1).

Para obtener la fórmula definitiva desarrolla este planteamiento de la siguiente manera:

1º. Toma como ecuación de la recta dada $y = ax + b$ (2).

2º. Entonces la perpendicular por el punto dado de coordenadas α y β es

$$y - \beta = -\tfrac{1}{a}(x - \alpha) \text{ (3)}$$

en la que *x* e *y* representa lo mismo que α' y β'

3º. Quiere expresar la fórmula (1) en función de *x* e *y*; para ello busca sendas expresiones para las diferencias $x - \alpha$ e $y - \beta$ que obtiene de sustituir el valor de *y* en la ecuación (3), es decir

$$ax + b - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$$

de donde

$$x - \alpha = \frac{a(\beta - b - a\alpha)}{a^2 + 1}$$

que al sustutuirlo en la ecuación (3) se obtiene

$$y - \beta = -\frac{\beta - a\alpha - b}{a^2 + 1}$$

4º. Sustituyendo estas expresiones en (1) proporciona (sin realizar las operaciones) la expresión general de la longitud de la perpendicular

$$\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}}$$

15º. Ángulo entre dos rectas.

Lacroix determina el seno, el coseno y la tangente del ángulo que forman dos rectas dadas de ecuaciones $y = ax + b$, $y = a'x + b'$. Dado que el ángulo no varía si considera las respectivas paralelas que pasan por el origen. En lugar de trabajar con estas ecuaciones trabaja con $y = ax$, $y = a'x$, representadas por las líneas *AM* y *AM*' de la figura 40.

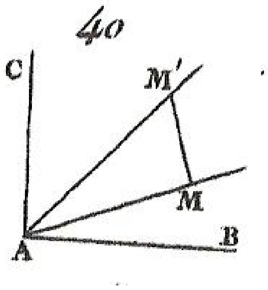


Figura 29

1º. Toma *M*' sobre la recta AM' de coordenadas α y β, baja la perpendicular *MM*'sobre la otra recta, la recta *AM*, cuya longitud teniendo en cuenta que *b* = 0 viene expresada por

$$\frac{\beta - a\alpha}{\sqrt{1 + a^2}}$$

2º. Toma *AM*' = *r* y dado que las coordenadas de *A* son nulas, se tiene que

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2$$

3ª. Dado que *M*' pertenece a la recta *AM*' de ecuación $y = a'x$ se infiere que $\beta = a'\alpha$ ecuación que combinada con la anterior da

$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{1 + a'^2}}$$

$$\beta = \frac{a'r}{\sqrt{1 + a'^2}}$$

4º. Al sustituir estos valores en la expresión de la perpendicular obtiene

$$\frac{r(a' - a)}{\sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 + a'^2}}$$

5º. Llama, como se ha asignado en la trigonometría, seno a la perpendicular *MM*' de lo que se infiere

$$sen\, MAM' = \frac{r(a' - a)}{\sqrt{1 + a^2}\sqrt{1 + a'^2}}$$

En cuya expresión *r* representa el radio del círculo.

6º. Resta de r^2 el cuadrado del seno con lo que obtinen el valor de $\overline{AM}^2$, o lo que es lo mismo el coseno del ángulo *MAM*'

$$cos^2\, MAM' = \frac{r^2(1 + a^2)(1 + a'^2) - r^2(a' - a)^2}{(1 + a^2)(1 + a'^2)} = \frac{r^2(1 + 2aa' + a^2a'^2)}{(1 + a^2)(1 + a'^2)}$$

Sacando la raíz cuadrada resulta

$$cos\, MAM' = \frac{r(1 + aa')}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + a'^2)}}$$

7º. Haciendo *r* = 1 obtiene la expresión siguiente

$$tan\, MAM' = \frac{sen\, MAM'}{cosMAM'} = \frac{a' - a}{1 + aa'}$$

6.3. Resumen

Del exhaustivo y completo estudio de Lacroix formalmente apenas hay diferencias en el tratamiento de la geometría de la recta en el plano del que hacemos en la actualidad, cabe destacar que todavía no se expresa en esta época, o al menos en la obra de Lacroix, las coordenadas como un par ordenado.

Euler apenas trata la recta basándose en que ya es lo suficientemente conocida y estudiada, sin embargo hemos analizado la importancia del estudio que de la misma hace Lacroix, sobretodo por la sistematización y estructuración que ha utilizado, facilitando el aprendizaje de los contenidos expuestos.

7. CONSIDERACIONES FINALES.

De todos los modos posibles de analizar la historia desde la perspectiva de la didáctica de la matemática, optamos por explorar los conocimientos petrificados en los textos más relevantes en el momento en que las coordenadas cartesianas iban a tomar su forma definitiva tanto en los textos de cálculo como en los textos de geometría analítica de manera prácticamente simultáneamente. Lo hemos hecho así porque, por una parte, el inicio del estudio de las funciones a partir de las propiedades de sus curvas correspondientes y, por otra, la recuperación del interés por la geometría sintética así como la aplicación del álgebra a la resolución de los problemas de la geometría propiciaron el desarrollo de la geometría analítica y el establecimiento del estudio de funciones y lugares geométricos a través de las coordenadas, otorgando el estatus definitivo a la geometría analítica que iniciaron Descartes y Fermat.

Del estudio de funciones en la *Introductio* destacamos las dos definiciones de función que aparecen:

- La primera define como función Z a toda expresión analítica de z, es decir, a toda expresión compuesta de potencias, logaritmos, funciones trigonométricas y similares, sin precisar qué combinaciones son admisibles.
- En la segunda, una función y de x queda definida siempre que una curva sea trazada en un sistema de coordenadas, en el que solamente hay eje de abscisas.

En cualquiera de sus dos expresiones, es un concepto de función distinto del actual, ya que la función puede tomar más de un valor e incluso infintos valores. Concepto de función que también utiliza Lacroix, pues en los ejemplos que hemos visto del *Traité du calcul*, la función toma más de un valor.

En la *Introductio* no aparece el concepto de función continua, pero sí el de curva continua, cuyo significado hace referencia a la invariabilidad de la ecuación o de la expresión analítica que define a la función; y dado que puede tomar valores imaginarios o diversos valores, a menudo no se puede dibujar la curva de un solo trazo, pero ello no significa que sea discontinua: el concepto de curva discontinua en Euler sería en cierta manera equivalente al concepto actual de función a trozos.

Uno de los instrumentos básicos en el estudio de las funciones tanto en la *Introductio* como en el *Traité du Cálcul* estriba en el trazado de la curva.

En la *Introductio*

A partir de la función se determinan sus “infinitos valores”, las aplicadas, que se representan elevando un segmento perpendicular al eje de abscisas. Estos valores no son pares de números sino magnitudes que se representan mediante segmentos, la abscisa y la aplicada, y son los extremos de las aplicadas los que trazan la curva de la función. Esto es, la curva no se describe por un punto que se mueve, ni es un conjunto de puntos.

En el *Traité du calcul*

A partir de la función se determina una tabla de valores tal como la entendemos actualmente, salvo por el hecho de que la función puede tomar más de un valor. Valores que se representan conjuntamente en el plano cartesiano teniendo en cuenta la longitud y el signo de las coordenadas, a partir de los que se dibuja la curva.

Tanto en la *Introductio* como en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* la arbitrariedad de los ejes y el origen de coordenadas originan la necesidad de justificar que ecuaciones diferentes no tienen por qué dar curvas diferentes. Para determinar qué ecuaciones están asociadas a una misma curva, en ambos textos, se obtienen las ecuaciones de cambio de coordenadas. Que en Euler a la postre proporcionarán las ecuaciones generales de los diferentes tipos de funciones. Y que en Lacroix se obtienen tras el estudio de la recta.

Una de las mayores aportaciones de estos autores respecto a la representación gráfica de funciones o lugares geométricos en el plano estriba en el reconocimiento y justificación, sobre todo en Lacroix, del uso de las cantidades negativas en la representación gráfica de funciones, dado que se reconoce que la forma gráfica de la función depende en gran medida del uso de las cantidades negativas, es más, no se puede obtener la forma completa de una curva si no se utilizan las cantidades negativas.

La otra gran aportación surge de la evolución de las coordenadas geométricas, que Euler recoge en la *Introductio,* al establecimiento de unos ejes de coordenadas absolutos en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*, que permiten la localización de puntos en el plano cartesiano mediante un par de coordenadas que se consideran de forma conjunta pero independientes, a las que solamente les faltará tomar la expresión actual como un par ordenado.

Para terminar este estudio exploratorio podemos afirmar que dos de los obstáculos de mayor importancia que hemos visto en el uso y sistematización de las coordenadas en los textos estudiados son precisamente la dotación de significado de la cantidades negativas en la geometría y el paso de las magnitudes coordenadas (ligadas a cada curva o a su ecuación) a las coordenadas como un par de números (no sometidos a curva alguna o ecuación), que se representan en el plano como longitudes orientadas según el convenio de los signos, lo que permitió el establecimiento definitivo de unos ejes de coordenadas absolutos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arenzana, V. (1990). El rigor en los libros de texto de Geometría en los comienzos del siglo XIX: José Mariano Vallejo y las Adiciones a la Geometría de Don Benito Valls. *Llull*, 13, pp. 5-19.

Bell, E. T. (1950). *Les grands mathématiciens*. París: Payot.

Blanco, M. (1999) Anàlisi de la controversia l'Hôpital - Bernoulli. Treball de recerca elaborat per a l'obtenció del títol de magíster en Història de la Ciència. Universitat Autònoma de Barcelona.

Blanco, M. (2004). Hermenèutica del càlcul diferencial a lEuropa del segle XVIII: de l'Analyse des infiniment petits de LHôpital (1696) al Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral de Lacroix (1802). Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Boyer, C. G. (2007). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Boyer, C. G. (2004). *History of analytic geometry.* New York: Dover Publications, Inc.

Collette, J. P. (1986). *Historia de las Matemáticas*. México: Editorial Siglo Veintiuno.

Decorps-Foulquier, M. (1999). Sur les figures du traité des coniques d'Apollonios de Pergé edité par Eutocius d'Ascalon. *Revue d'histoire des mathématiques*, 5, pp. 61-82.

De la Torre, A. (2006). El método cartesiano y la geometría analítica. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, XIV, pp. 75

Descartes, R. (1637). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences, plus la dioptrique, les météores et la géométrie qui sont des essais de cette méthode*. Leyde: De l'imprimerie de Jan Maire.

Descartes, R. (1925). *The Geometry* of René Descartes with a facsimile of the first edition, translated from French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham. Chicago, Ill: Open Court Publishing Co. [Reprinted New York, NY: Dover, 1954.]

Descartes, R. (1981). *Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*. Prólogo, traducción y notas de Guillermo Quintás. Madrid: Alfaguara.

Dunham, W. (2000). *Euler, el maestro de todos los matemáticos*. Madrid: Nivola.

Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum*. (2 vols.). Lausanne: Marcum-Michaelem Bousquets et Associés.

Euler, L. (1774). *Élémens d'algebre. De l'Analyse Déterminée.* Lyon: Chez Jean-Marie Bruyset, Pere & Fils.

Euler, L. (1796). *Introduction à l'analyse infinitésimale*. (Vol. 1). Traducción al francés de J. B. Labey. París: Chez Barrois.

Euler, L. (1797) *Introduction à l'analyse infinitésimale*. (Vol. 2). Traducción al francés de J.B. Labey. París: Chez Barrois.

Euler, L. (2000). *Introducción al análisis de los infinitos*. Traducción castellana de José Luis Arantegi Tamayo. Sevilla: SAEM "Thales", Real Sociedad Matemática Española.

Ehrhardt, C. (2009). L'identité sociale d'un mathématicien et enseignant, *Histoire de l'éducation*, 123, pp. 5-43.

Fermat, P. (1894). *Œuvres*. Édition de P. Tannery et Ch. Henry. Paris: Gauthier-Villars et Fils.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel

Glaeser, G. (1986). Comment l'histoire de la géométrie analytique peut aider les professeurs dans leur enseignement, *L'ouvert*, 44, pp. 6-25

Gómez, B. (2006). Los ritos en la enseñanza de la regla de tres. En A. Maz, M. Torralbo y L. Rico (Eds.*). José Mariano Vallejo, El Matemático Ilustrado. Una mirada desde la educación matemática* (pp. 47-69). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Gómez, B. (2008). Pasado y presente de los manuales escolares. En Associação de Professores de Matemáticas (Eds.), *Actas do SIEM- 2007. XVIII SIEM. Seminário de Investigação em Educação Matemática. Painel: Avaliação de Manuais Escolares* (pp. 1-8). Lisboa: SIEM.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, 5(2), pp. 49-65.

González, Mª T. y Sierra, M. (2003). El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico A. Vallecillos (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 109-130). Granada: Universidad de Granada.

González, P. M. (1997). La Matemática de la Revolución Francesa. En *Actas Seminario Orotava de Historia de la Ciencia, año II*. Las Palmas.

González Urbaneja, P. M. (2007a). Raíces históricas y trascendencia de la Geometría Analítica. *Sigma, 30*, pp. 205-236.

González Urbaneja, P. M. (2007b). La geometría analítica de la *Introductio in Analysin Infinitorum* de Euler. *Sigma*, *31*, pp. 169-193.

Hernández, V. M. (2002). La geometría analítica de Descartes y Fermat: ¿Y Apolonio? *Apuntes de historia de las matemáticas, 1*(1) pp. 32-45.

Klein, F. (2006). *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Aritmética. Álgebra. Análisis*. Traducción de Jesús Fernández. Madrid: Nivola.

Kuhn, T. S. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas.* Traducción castellana de Agustín Contín. México: Fondo de Cultura Económica.

Lacroix, S. F. (1797). *Traité de calcul différentiel I*. Première édition. Paris: Duprat.

Lacroix, S. F. (1802). *Traité élémentaire de calcul différentiel et calcul intégral*. Première édition. Paris: Duprat.

Lacroix, S. F. (1807). *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et d'application de l'algèbre à la géométrie*. Quatrième édition. Paris: Courcier.

Lacroix, S. F. (1820). *Tratado elemental de trigonometría rectilínea y de la aplicación del álgebra a la geometría*. Sexta edición. Madrid: En la Imprenta Real.

Lacroix, S. F. (1821). *Curso completo de matemáticas. Tomo 2. Álgebra.* Primera edición. Madrid: En la Imprenta Real.

Lacroix, S. F. (1838). *Essais sur l'enseignement en général, et sur celui des mathématiques en particulier*. Quatrième édition. Paris: Bachelier.

López, M. (2007). La ilustración en el pensamiento matemático. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 101(1), pp 1-20.

Massa, M. R. (2001). Las relaciones entre el álgebra y la geometría en el siglo XVII.

Llull, 24, pp. 705-725.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M. J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5-20). Santander: SEIEM.

Maz, A. y Rico, L. (2009). Números negativos en los siglos XVIII y XIX fenomenología y representaciones. *Revista de Investigación Psicoeducativa*, 7(1), pp. 117-129.

Navarro, M. y Puig, L. (2011). L'herència d'Euler: coordenades cartesianes i traçat de corbes al volum II de la Introductio in Analisyn infinitorum. En M. Contreras, O. Monzó, y L. Puig (Eds.). *Actes de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana. Vol. I* (pp. 225-242). València: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī".

Navarro, M. y Puig, L. (en prensa). Aspectes de la representació gràfica de funcions en el tractat elemental de trigonometria de Lacroix. *Actas IX Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori/ICE.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada.

Puig, L. (2006). Vallejo perplejo. En A. Maz, M. Torralbo, y L. Rico (Eds.) *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la educación matemática* (pp. 113-138). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Puig, L. (2008). History of algebraic ideas and research on educational algebra. In M. Niss (Ed.) *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education*. CD-version. Roskilde: IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University

Puig, L. (2011a). Dos o tres cosas que sé de Hipatia. En M. Contreras, O. Monzó y

L.Puig (Eds.). *Actes de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana* (vol. I, pp. 15-31). València: Societat d'Educació Matemàtica de laComunitat Valenciana "Al-Khwārizmī".

Puig, L. (2011b). Researching the History of Algebraic Ideas from an Educational Point of View. In. V. Katz & C. Tzanakis (Eds.) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 29-42). The Mathematical Association of America.

Puig, L. y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Boston / Dordrecht / New York / London: Kluwer Academic Publishers

Ramírez, J. A. (2007). Reflexiones sobre las ideas de Nicolás Oresme. *Asclepio: Revista de Historia de la Medicina y de la Ciencia*, LIX(1), pp. 23-34.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula*, 10, pp. 89-104.

Sierra, M. (2009). Introducción al Seminario sobre análisis de libros de texto. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 3-4). Santander: SEIEM.

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the Learning of Mathematics*, *7*, pp. 41-51.

Schubring, G. (1988). Un savant des lumières. Un livre élémentaire pour la république. En H. Deledicq y A. Deledicq (Eds.) *Condorcet. Moyens d'apprendre a compter sûrement et avec facilité*. París: Art, Culture, Lecture, Editions.

Taton, R. (1953). Laplace et Sylvestre-François Lacroix. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, 6*(4), pp. 350-360.

Taton, R. (1959a). Condorcet et Sylvestre-François Lacroix. *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, 12*(2), pp. 127-158.

Taton, R. (1959b). Condorcet et Sylvestre-François Lacroix (Fin). *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, 12*(3), pp. 243-262.

Youschkevitch, A. P. (1981). Le concept de function jusqu'au milieu du XIXème siècle. J. L. Ovaert et D. Reisz (Eds.) *Fragments d'histoire des mathématiques, 41*, pp. 7-68.

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Universitat de València Estudi General

DEL ÁLGEBRA A LA GEOMETRÍA

LA SISTEMATIZACIÓN DE LAS COORDENADAS CARTESIANAS Y LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES EN LA *INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM* DE EULER Y EN EL *TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DU CALCUL INTÉGRAL* Y EN EL *TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE, ET D'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE* DE LACROIX.

ANEXOS

Presentado por

Maite Navarro Moncho

Valencia, 2012

ANEXOS TEXTO

ANEXOS GEOGEBRA

ANEXO I

TABLE.

(*) Labey, Professeur d'un mérite distingué, vient de donner une traduction française de cet Ouvrage, à laquelle il a joint des notes intéressantes.
(**) Cet Ouvrage, si justement désiré, paroîtra incessamment.

(*) Il seroit à désirer qu'on réimprimât cet Ouvrage, devenu très-rare, et qu'on le joignît à celui de Newton dont il est le commentaire.

INTRODUCTION.

ANEXO II

ANEXO II. EDICIONES DE OBRAS DE LACROIX LOCALIZADAS

1. Ediciones originales

Titulo	edición	año	ciudad	editor
Cours complet de mathématiques				
Traité élementaire d'arithmétique	1ª	1799		
	3ª	1801 (IX)	Paris	Duprat
	4ª	1804 (XII)	Paris	Courcier
	7ª	1807	Paris	Courcier
	13ª	1813	Paris	Courcier
	17ª	1826	Paris	Bachelier
	20ª	1848	Paris	Bachelier
Elémens d'algèbre par Clairaut…	5ª	1797 (V)	Paris	Duprat
Elémens d'algèbre	1ª	1799 (VIII)	Paris	Duprat
	2ª	1800 (IX)	Paris	Duprat
	3ª	1803 (XI)	Paris	Duprat
	5ª	1804 (XIII)	Paris	Courcier
	6ª	1807	Paris	Courcier
	7ª	1808	Paris	Courcier
	10ª	1812	Paris	Courcier
	11ª	1815	Paris	Courcier
	12ª	1818	Paris	Courcier
	14ª	1825	Paris	Bachelier
	15ª	1830	Bruxelles	H. Remy
	16ª	1835	Bruxelles	H. Remy
	17ª	1842	Paris	Bachelier
	20ª	1854		
	23ª	1871	Paris	Gauthier-Villars
Complément des élémens d'algèbre	1ª	1800		
	2ª	1801 (IX)	Paris	Duprat (Imprimerie Crapelet)

	3ª	1804 (XIII)	Paris	Courcier
	4ª	1817	Paris	Courcier
	5ª	1825	Paris	Bachelier
	6ª	1835	Paris	Bachelier
	7ª	1863	Paris	Mallet-Bachelier
Elemens de geometrie	1ª	1798		
	7ª	1808	Paris	Courcier
	9ª	1811	Paris	Courcier
	10ª	1814	Paris	Courcier
	11ª	1819	Paris	Courcier
	13ª	1825	Paris	Bachelier
	14ª	1830	Paris	Bachelier
	16ª	1848	Paris	Bachelier
	17ª	1855	Paris	Mallet-Bachelier
	18ª	1863		
	26ª	1912	Paris	Gauthier-Villars
Essais de geometrie sur les plans et…	1ª	1795 (III)	Paris	Fuchs, Régent et Bernard
Complément des élémens de géometrie (Essais de…)	2ª	1802 (X)	Paris	Duprat (Imprimerie Crapelet)
	4ª	1812	Paris	Courcier
	6ª	1829	Paris	Bachelier
Traité élémentaire de trigonometrie	1ª	1798		
	2ª	1799/1800 (VIII)	Paris	Duprat
	3ª	1803 (XII)	Paris	Courcier
	4ª	1807	Paris	Courcier
	5ª	1810	Paris	Courcier
	6ª	1813	Paris	Courcier
	7ª	1822	Paris	Bachelier et Huzard
	8ª	1827	Paris	Bachelier
	10ª	1852	Paris	Bachelier

Traité élémentaire de calcul différentiel…	1ª	1802 (X)	Paris	Duprat (Imprimerie Crapelet)
	2ª	1806	Paris	Courcier
	3ª	1820	Paris	
	4ª	1828	Paris	Bachelier
	5ª	1837	Paris	Bachelier
	6ª	1862	Paris	Mallet-Bachelier
	7ª	1867	Paris	Gauthier-Villars
	9ª	1881		
Traité élémentaire de calcul de probabilités	1ª	1816	Paris	Courcier
	2ª	1822	Paris	Bachelier
	3ª	1833	Paris	Bachelier
	4ª	1864	Paris	Mallet-Bachelier
Essais sur l'enseignement…				
Essais sur l'enseignement…	1ª	1805 (XIV)	Paris	Courcier
	2ª	1816	Paris	Courcier
	3ª	1828	Paris	Bachelier
	4ª	1838	Paris	Bachelier
Traité de calcul différentiel				
Traité de calcul différentiel t I	1ª	1797 (V)	Paris	Duprat
Traité de calcul différentiel t II	1ª	1798 (VI)	Paris	Duprat
Traité de calcul différentiel t III (Traité des différences et des séries)	1ª	1800 (VIII)	Paris	Duprat
Traité de calcul différentiel t I	2ª	1810	Paris	Courcier
Traité de calcul différentiel t II	2ª	1814	Paris	Courcier
Traité de calcul différentiel t III	2ª	1819	Paris	Courcier

2. Traducciones castellanas.

Título	edición	año	ciudad	editor
Curso completo elemental… aritmética	1ª?	1807	Madrid	En la Imprenta Real
Tratado elemental de aritmética	3ª	1826	Madrid	En la Imprenta Real
	5ª	1839	Madrid	En la Imprenta Nacional
	6ª	1844	Madrid	En la Imprenta Nacional
	7ª	1846	Madrid	En la Imprenta Nacional
Curso completo de matemáticas, t. 2 álgebra	1ª	1821	Madrid	En la Imprenta Real
	6ª	1846	Madrid	En la Imprenta Nacional
Elementos de geometría	2ª	1827	Madrid	En la Imprenta Real
	3ª	1841	Madrid	En la Imprenta Nacional
	4ª	1846	Madrid	En la Imprenta Nacional
	5ª	1848	Madrid	En la Imprenta Nacional
Tratado elemental de trigonometría…	6ª	1820	Madrid	En la Imprenta Real
	7ª	1835	Madrid	En la Imprenta Real
	8ª	1846	Madrid	En la Imprenta Nacional

ANEXO III

ANEXO III. PRECURSORES DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA.

George Glaeser en una conferencia pronunciada en Mulhouse el 30 de enero de 1986 y el 6 de febrero del mismo año en Estrasburgo considera que la historia de la geometría analítica se extiende a lo largo de 22 siglos, desde Apolonio hasta nuestros días y la divide en cuatro fases[1]:

1ª Fase: Fase Heurística. Incluye a Euclides, Arquímedes, Apolonio, Oresme, Fermat y Descartes.

2ª Fase: Construcción algorítmica. Desde Euler(1748) hasta Poncelet y Chasles (1862), incluye también a Lagrange, Monge, Lacroix, Biot, Lamé y Carnot.

3ª Fase: Extensión de la idea de coordenada. Desde Wessel (1799) hasta Cayley, Grassmann y Hamilton (1847).

4ª Fase: Renovación Heurística. Salmon, Bouligand (geometría vectorial, 1924) y el álgebra lineal del siglo XX.

Por su parte, Sierra (1998) afirma que hay cierta unanimidad en considerar cinco grandes periodos en la historia del concepto de función y sus representaciones[2].

1ª. Edad Antigua, caracterizada por las primeras representaciones gráficas y la búsqueda de regularidades.

2ª. Edad Media, con las aportaciones destacadas de Oresme.

3ª. Siglos XV, XVI y XVII, con el desarrollo del concepto de función. Destaca a Descartes, Newton y Leibniz.

4ª. Siglo XVIII, con la consideración del concepto de función como central en matemáticas, en las obras de Bernouille y Euler.

5ª. Siglos XIX y XX, con la generalización del concepto de función.

Combinando estas dos divisiones con nuestro propósito de investigar cómo se organiza en los libros de texto de Euler y Lacroix la enseñanza de las coordenadas cartesianas en su uso para la representación gráfica de funciones, hemos dividido los precursores de la geometría analítica en sus dos primeras fases en cinco épocas:

[1] En cada fase presenta una tabla cronológica de los aspectos más relevantes de la geometría analítica en cada uno de los matemáticos que destaca. Las tablas se pueden ver en el anexo III.

[2] Sierra se refiere a los diferentes tipos de representación utilizados para las funciones: descripción verbal, tablas, gráficas y expresiones algebraicas.

1.1. LA ÉPOCA DE LOS GEÓMETRAS GRIEGOS: APOLONIO.

1.2. EDAD MEDIA: LA ÉPOCA DE ORESME.

1.3. SIGLO XVII: INICIO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA. LA ÉPOCA DE DESCARTES Y FERMAT.

1.4. SIGLO XVIII: DE DESCARTES A EULER, CON LAS FIGURAS DESTACADAS DE NEWTON Y EULER.

1.4.1. EL CÁLCULO EN EL SIGLO XVIII.

1.4.2. NEWTON: *ENUMERATIO LINEARUM TERTII ORDINIS*..

1.5. REVOLUCIÓN FRANCESA: INCORPORACIÓN DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA A LOS LIBROS DE TEXTO: LA ÉPOCA DE LACROIX.

Siempre que nos sea posible, recorreremos estas épocas a través de las figuras utilizadas en el estudio de las propiedades de las funciones (o, en su caso, las curvas) a través de su gráfica.

1.1. LA ÉPOCA DE LOS GEÓMETRAS GRIEGOS: APOLONIO.

Hay múltiples precursores de la idea de coordenadas en la historia. Si consideramos el concepto de coordenadas no como un medio de representación analítica sino como un recurso para establecer rumbos, determinar la posición de los astros…, la idea de coordenadas se remonta a la Antigüedad. Según Sierra (1997), estaba presente en los agrimensores egipcios, pero la primera referencia a las coordenadas aparece en la obra de los astrónomos y geógrafos griegos. Hiparco introdujo las coordenadas geográficas (longitud y latitud) para ubicar puntos sobre la superficie terrestre. Incluso, según Sierra (1997), la división de las ciudades romanas en dos ejes perpendiculares, el *decumanus* y el *cardo*, organizaban las calles en un sistema de coordenadas rectangulares.

La idea de coordenadas empieza a desarrollarse con los geómetras griegos: sobre todo en Menecmo y Apolonio. Se suele atribuir a Menecmo (s. IV a.C.) el descubrimiento de las secciones cónicas, pero lo cierto es que apenas se sabe nada su obra. Afirma Boyer (2007) que las principales fuentes documentales autorizadas que permiten atribuir a Menecmo tal descubrimiento es una carta de Eratóstenes al rey Ptolomeo Euergetes citada 700 años más tarde por Eutocio. En ella se mencionan varias duplicaciones del cubo, entre las que se encuentra la de Menecmo.

Hipócrates de Chios (s.V a.C.) ya había demostrado que se podría conseguir la duplicación del cubo siempre que se pudieran encontrar curvas que tuvieran la propiedad expresada en la proporción continua ($a : x :: x : y :: y : 2a$). En la búsqueda de las curvas que tuvieran dicha propiedad, Menecmo descubrió las cónicas. Partió de un cono circular recto de una sola hoja y de ángulo recto en el vértice y descubrió que al cortarlo por un plano perpendicular a uno de sus elementos o generatrices, la curva de intersección, sección del cono rectángulo, es una curva cuya ecuación en términos de la geometría analítica actual se puede escribir de la forma $y^2 = lx$, siendo l una constante que depende únicamente de la distancia del vértice del cono al plano de la sección. Al cortar por un plano perpendicular a una generatriz un cono recto acutángulo obtiene una sección de un cono acutángulo cuya ecuación en términos modernos es $y^2 = lx - \frac{b^2}{a^2}x^2$; de manera análoga, al cortar perpendicularmente por una generatriz un cono recto obtusángulo, una sección de cono obtusángulo de ecuación $y^2 = lx + \frac{b^2}{a^2}x^2$; donde a y b en ambos son constantes.

Cuando Apolonio de Perga[3] compuso las *Cónicas* hacía ya más de un siglo que se conocían, y se habían compuesto algunos tratados sobre secciones cónicas, pero las *Cónicas* de Apolonio se había impuesto sobre el resto de tratados.

Gran parte de su obra ha desaparecido, solo se conservan dos tratados: *Secciones en una razón dada* y las *Cónicas*, y en algunos casos se conoce su contenido gracias a las descripciones que siglos más tarde realizó Pappus. Apolonio fue conocido en la antigüedad como "El Gran Geómetra", parece ser que seis de sus obras fueron incluidas en el "Tesoro del análisis" del que Pappus nos dice que consistía en una colección que contenía los conocimientos destinados a aquellos que quería prepararse para abordar los problemas relativos a curvas superiores.

Las *Cónicas* estaban compuestas en ocho libros de los que solamente quedan siete, los cuatro primeros en griego y los tres siguientes en una traducción árabe:

> Lo que queda de las Cónicas de Apolonio no es el conjunto de los ocho libros que lo componían, sino sólo cuatro de ellos en griego y otros tres de los que sólo existe una traducción en árabe.

[3] No se sabe con exactitud las fechas en las que vivió Apolonio de Perga, pero se ha sugerido como fechas de su nacimiento y muerte los años 262 y 190 a.C. "Apolonio (262-190 a.n.e.) nació en Perga, actualmente en Turquía, y vivió en Éfeso, Pérgamo y Alejandría. Parece ser que fue en Alejandría donde redactó las *Cónicas*, en ocho libros." (Puig, 2011b, p. 22)

> […] Pappus (290-350) en su *Synagoge* o *Colección Matemática* (también ocho libros de los que se ha perdido el primero y el segundo se conserva mal) todavía se refiere a los ocho. Los que se conservan en griego proceden del comentario de Eutocio (s. VI), quien se sabe que tenía los otros cuatro libros porque prometió que los editaría también, pero nunca lo hizo, o al menos no hay noticia de que lo hiciera. No es raro que los ocho libros de las Cónicas aparezcan en dos bloques de cuatro. El propio Apolonio en una carta a Eudemo, que se suele incluir como prólogo en las ediciones de las *Cónicas*, le dice que los cuatro primeros libros constituyen "un curso en los elementos" [de las *Cónicas*]. Quizá por eso Eutocio sólo comentó esos cuatro libros, preparando así para sus alumnos un curso elemental de *Cónicas* y esperando si resultaba interesante comentar los demás.
>
> La historia de los libros que se han conservado sólo en árabe es un buen ejemplo de las dificultades de transmisión y conservación de los libros en épocas antiguas. Los hermanos Musa dicen que tienen los cuatro primero en la edición de Eutocio y los tres siguientes "según los compuso Apolonio". Los Banū Mūsā (Muhammad, Ahmad y al-Hasan) son del siglo IX, algo posteriores a al-Khwārizmi. La historia de cómo llegaron a tener esos siete libros en dos versiones distintas es la siguiente. Habían comprado esos siete libros de las *Cónicas*, pero, cuentan, "la tarea [de traducirlos y entenderlos] resultó serles imposible por el excesivo número de errores que se habían acumulado en ese manuscrito. Unos años más tarde, en Siria, Ahmad ibn-Mūsā encontró una copia de la edición de Eutocio de los primeros cuatro libros […] esto les permitió entender el texto de las *Cónicas* que habían encontrado antes, y en particular los libros V a VII que sólo estaban en el primer manuscrito que compraron" (Fried y Unguru, 2001, p. 7). Los Banū Mūsā encargaron la traducción, que la hicieron Hilāl ibn Abī Hilāl al-Himsi (libros I-IV) y Thābit ibn Qurra (V-VII). Hay noticia de otra traducción árabe que no se conserva hecha por el hijo de quien fue el director de la Casa de la Sabiduría durante esos años, responsable de que se hicieran gran parte de las traducciones, que era un cristiano nestoriano. (Puig, 2011, pp. 22-23)

Del último libro se han intentado algunas reconstrucciones:

> El libro VIII, que no se conserva ni en griego ni en árabe, se ha intentado reconstruir en varias ocasiones a partir de las descripciones que hay de él del propio Apolonio o en la *Colección* de Pappus. La primera reconstrucción de la que se tiene noticia la hizo alrededor de 1021 ibn al-Haytham. La más conocida es la que hizo Halley, en 1710, junto con su edición princeps de los cuatro libros griegos y su traducción al latín de los tres árabes de los Banu Musa. (Puig, 2011, p. 23)

En 1675 Isaac Barrow publicó Las *Cónicas* de Apolonio en una obra que contiene también obras de Arquímedes y de Teodosio. En 1923 Paul ver Eecke publicó la primera traducción del griego al francés de las *Cónicas* de Apolonio.

Según Decorps-Foulquier (1999, pp. 61-62) las *Cónicas* "Recoge, ordena y muestra las propiedades fundamentales de tres curvas, la parábola, hipérbola y la elipse, definidas como secciones de un cono cualquiera"[4].

Hasta Apolonio las cónicas se obtenían por medio de secciones cónicas en tres tipos de conos distintos, parece que fue Apolonio el primero en demostrar que no es necesario considerar exclusivamente secciones perpendiculares a una generatriz y que de un mismo cono, que además no tiene porqué ser recto, se pueden obtener las tres secciones sin más que variar la inclinación del plano de corte. La sustitución del cono de una hoja por el cono de dos hojas unidas por el vértice, originó, entre otras cosas, que las "dos hipérbolas" de las que solían hablar los geómetras pasasen a ser "las dos ramas" de una única hipérbola.

Apolonio obtenía, como sus predecesores, sus curvas a partir de un cono tridimensional, pero Apolonio dedujo a partir del cono una propiedad plana fundamental o "síntoma" de la sección, de la que se obtiene una especie de condición necesaria y suficiente para que un punto esté sobre la curva, y a partir de entonces abandonó el cono y comenzó a estudiar las curvas por métodos planimétricos.

Durán, en la nota 213 de la edición anotada del *Análisis* de Newton, recoge las primeras definiciones de Apolonio sobre las cónicas: "Doy el nombre de diámetro a cualquier recta que, dibujada en la curva, biseque a todas las cuerdas paralelas a otra línea recta, y llamaré vértices a los extremos del diámetro que están sobre la curva, y a cada una de

[4] "Il rassemble, ordonne et démontre les propriétés fondamentales de trois courbes, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse, définies comme sections d'un cône quelconque".

las cuerdas paralelas a una ordenada del diámetro” y Durán añade: “La propiedad del diámetro de una cónica de bisecar las ordenadas la demostró Apolonio en uno de los primeros teoremas del libro I de las *Cónicas*”.

¿Pero qué hay de coordenadas en todo ello?

Según Boyer (2007, p. 207), Apolonio utiliza en las *Cónicas* lo que podríamos llamar un “sistema de coordenadas a posteriori”, basado en las distancias intrínsecas a una curva dada para estudiar sus propiedades.

En las *Cónicas* de Apolonio (las ilustraciones proceden de la Biblioteca del Real Instituto y Observatorio de la Armada de San Fernando (Cádiz) de la edición de I. Barrow de *Las Cónicas* de Apolonio (Londres, 1675)):

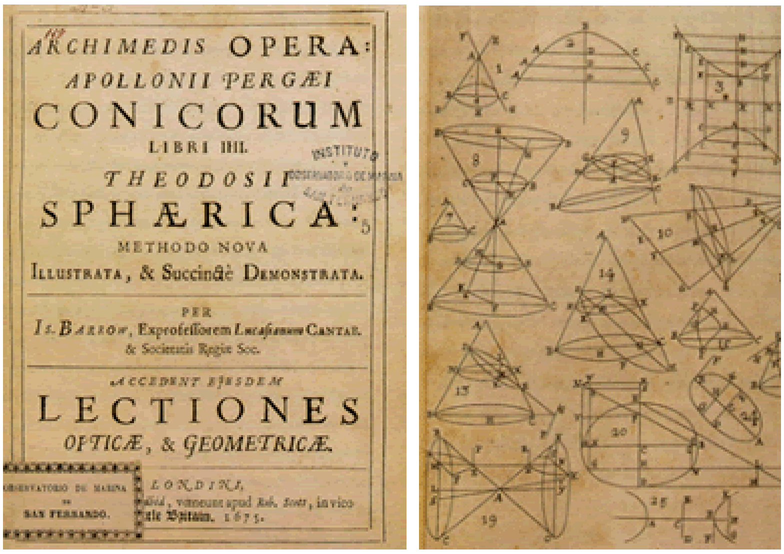


Figura 1

- Las “abscisas” son las distancias medidas sobre el diámetro a partir del punto de tangencia.

- Las “ordenadas” (*síntomas* de la curva), son los segmentos paralelos a la tangente interceptada por el diámetro y la curva.

- Las relaciones entre las “abscisas” y las “ordenadas” son formas retóricas de las ecuaciones analíticas de las curvas consideradas.

Boyer (2007, p.207) afirma que en la geometría de los griegos:

> […] no habría lugar para las magnitudes negativas y, por otro lado, lo que podríamos llamar un sistema de coordenadas venía siempre supuesto “a posteriori” a una curva dada para estudiar sus propiedades. No parece que se

presente ningún caso en el que se fije un sistema de coordenadas “a priori” con el fin de representar gráficamente una ecuación o relación expresada de forma simbólica o retórica. Podemos decir de la geometría griega que las ecuaciones vienen determinadas por las curvas, pero las curvas no vienen determinadas por las ecuaciones. (Boyer, 2007, p.207)

Las dificultades en el uso de las coordenadas en esta época se centran fundamentalmente, según Boyer (2007, p. 208), en dos motivos:

- El primero de ellos es el escaso número de curvas que estudiaron, pues aunque se obtengan métodos generales, éstos son innecesarios y poco útiles cuando los problemas se refieren a un número limitado de casos particulares.
- Y el segundo corresponde a las herramientas de las que disponían, el álgebra geométrica es más rigurosa que el álgebra renacentista pero muy incómoda de manejar.

A los que hay que añadir que “la idea general de una ecuación en cantidades indeterminadas fue ajena al pensamiento griego” (Boyer, 2007, p. 134).

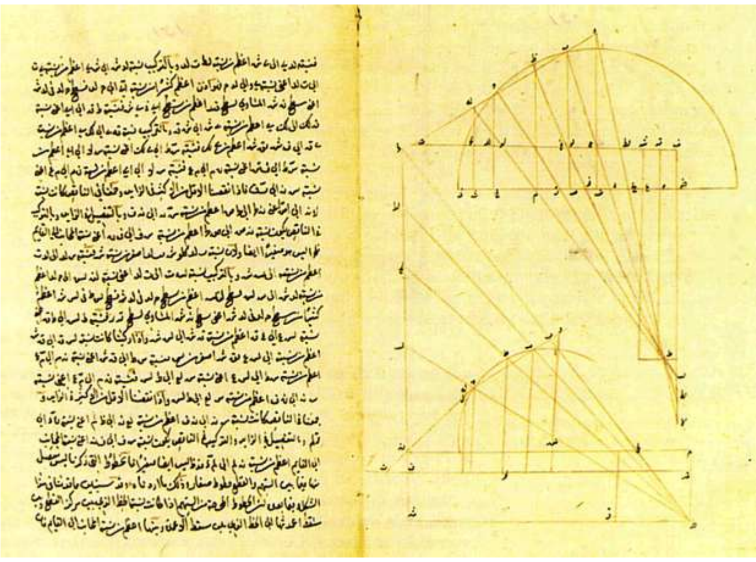


Figura 2

http://www.taringa.net/posts/ciencia-educacion/10687221/The-conics-of-Apollonius-of-Perga-_Las-conicas-de- Apolonio_.html

En los manuscritos del Vaticano

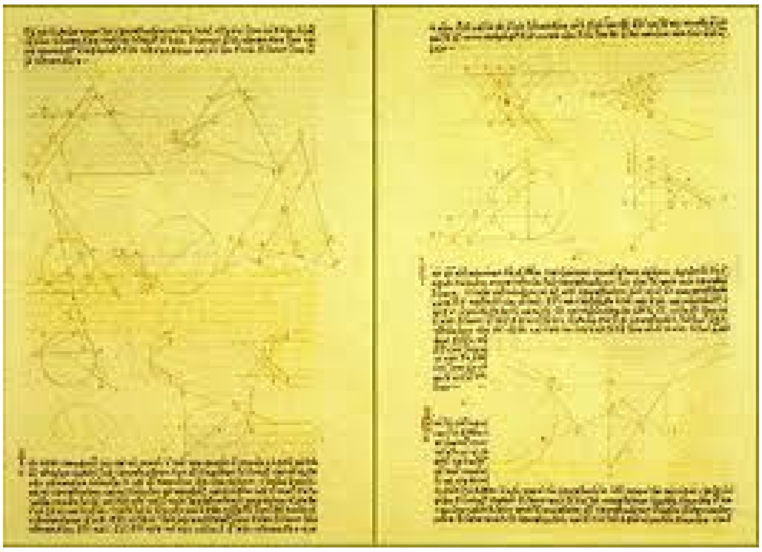


Figura 3

http://jeily.wordpress.com/apolonio-de-perga/

1.2. LA EDAD MEDIA: NICOLÁS ORESME (1323-1382).

Los términos de latitud y longitud introducidos por Oresme[5] para representar gráficamente las variaciones de una cantidad variable, se asemejan bastante (al menos en la forma) a nuestras ordenadas y abscisas, respectivamente.

Según Ramírez (2007, p. 23-24), durante la Edad Media siguiendo una tradición que se remonta a Aristóteles, "la cantidad y la cualidad constituyen dos categorías diferentes. La cantidad se concibe como una entidad constituida por partes homogéneas. El volumen, por ejemplo, que puede pensarse como formado por la agregación de volúmenes más pequeños. Un carácter distinto tienen las cualidades de los cuerpos, tales como la blancura de su superficie o el calor. Resultaba claro que no se podía conferir a éstas las propiedades de aditividad de las cantidades. Sin embargo, se reconocía que podía haber diferentes intensidades o grados para una cualidad dada." Más adelante añade: "puede decirse que durante los siglos XII, XIII y XIV se gestó una evolución en el pensamiento medieval que llevó al tratamiento de la variación de la

[5] Debido a la influencia y la sencillez de Oresme se considera que fue el primero al que se le ocurrió hacer una gráfica para representar una cantidad variable. En una nota Boyer (2007, p. 339) explica: "Presuponemos aquí, por sencillez de la exposición, que Oresme fue el primero que tuvo esta idea, pero probablemente no fue éste el caso. Marshall Clagett ha descubierto lo que parece una gráfica anterior, dibujada por Giovanni de Cosali, en la que la línea de longitudes aparece situada en posición vertical."

intensidad de una cualidad, similar al existente para la variación de una cantidad, es decir, a pensar en la adición de partes o grados de intensidad.”

Oresme desarrolla sus ideas en el *Tractatus de configuratione potentiarum et mensurarum difformitattum*. Según Ramírez (2007, p.26) en este tratado “generaliza la idea de representar una cualidad puntual por medio de un segmento, a la de representar una cualidad lineal por medio de una superficie, una cualidad superficial por medio de un volumen, e incluso a concebir la idea de una cuarta dimensión espacial para poder representar una cualidad de volumen”.

Posteriormente en el *Tractatus de latitudinibus formarum* “opta por llamar longitud (*longitudo*) o extensión (*extensio*) a la línea recta considerada sobre o en el seno del cuerpo afectada por una cierta cualidad, y reserva el nombre de latitud (*latitudo*) o intensidad (*intensio*), para designar el grado que adopta la cualidad en un punto dado de la extensión.”

En este artículo, Ramírez pretende refutar varias interpretaciones de algunas ideas de Oresme, entre las que se encuentran las interpretaciones que llevaron a Pierre Duhem a señalar a Oresme como el inventor de la geometría analítica.

> Otro punto de disputa aparece en la interpretación del tratamiento hecho por Oresme de las cualidades lineales, donde Duhem cree ver al inventor de la geometría analítica.
>
> En I.*xi* del *Tractatus* leemos:
>
> «Así, se podría decir que una cualidad es uniforme si es de igual intensidad en todas sus partes, o que una cualidad uniformemente disforme es tal que para tres puntos cualesquiera, la relación entre la distancia del primero al segundo y la distancia del segundo al tercero es igual a la relación entre el exceso de la intensidad en el primer punto con respecto al segundo y el exceso de la del segundo con respecto al tercero, si se ha llamado primero al punto en el que la intensidad es la mayor». […]
>
> Pero la intención de Oresme no es la de describir algebraicamente una relación entre los puntos involucrados que dé lugar a la ecuación de una recta. […]

> Maier es también contundente en la refutación de la interpretación de Duhem:
>
> «Oresme no ha introducido en absoluto sus *longitudo* y *latitudo* como coordenadas.
>
> Él no tiene para nada la intención de determinar con su ayuda la situación de un punto en un sistema de referencia, indicando su *longitudo* y *latitudo*. Su *longitudo* no es una abscisa en sentido moderno, es, como ya hemos dicho, la extensión total del sujeto considerado [...]. Oresme quiere, en resumidas cuentas, construir figuras geométricas, y no curvas en un sistema de referencia». (Ramírez, 2007, pp. 28-30)

Pero la interpretación de Duhemn está muy extendida entre investigadores e historiadores.

En efecto, según Azcárate y Deulofeu (1990)[6]: "con este tipo de representaciones, que nos recuerdan mucho a lo que llamamos representación gráfica de una función sobre unos ejes cartesianos, Oresme pretende que se entienda más fácil y más rápidamente la naturaleza de los cambios, ya sean cuantitativos o cualitativos, de forma que sea posible dar una representación de todos ellos"

Sierra (1998, p. 94) matiza: "No obstante, no podemos considerar la representación de Oresme como la expresión de una dependencia en el sentido actual; ello sería posible si nos centrásemos en la "línea superior o de intensidades" como tal, o todavía mejor con su derivada, es decir, en la forma como varía, pero analizando el trabajo de Oresme se ve cómo esta línea no aparece aislada sino que el fenómeno se representa a través de toda la figura, por su forma y por la superficie que queda bajo la curva"

Según González Urbaneja (2007a, p. 216) la obra de Oresme representa el segundo estadio histórico en la introducción de las coordenadas, pues el sistema de coordenadas se introduce a priori para representar los puntos de la curva.

Según De la Torre (2006, p. 82): "En el siglo XIV, Nicolás Oresme se anticipó a otro aspecto de la geometría analítica al representar ciertas leyes mediante el gráfico de una variable dependiente, llamada *latitudo*, contra una variable independiente, llamada *longitudo*, cuando esta última se le permitía tomar incrementos pequeños."

[6] Tomado de Sierra (1998, p. 94)

A su vez, José Mª Gavilán Izquierdo y Ricardo Barroso Campos en una ponencia titulada *El nacimiento de la Geometría analítica: "Descartes y Fermat"* en las VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales" afirman que Oresme representa la variación de la intensidad en dos ejes perpendiculares (*longitud* y *latitud*) siguiendo la terminología propia de los mapas que usaban los cosmógrafos y marinos. Opinan que la cualidad que representa Oresme es la variación de la velocidad en un movimiento uniformemente acelerado; y los dos ejes son el tiempo y la velocidad. Aunque reconocen que la idea de Oresme no es puramente geométrica sino dirigida a la variabilidad funcional.

Según Boyer (2007, pp. 339-341), Oresme estaba interesado en estudiar sobretodo aspectos relacionados con el cálculo infinitesimal, la manera en que varía la función (cálculo diferencial) y la manera en la que varía el área bajo una curva (cálculo integral)[7]; para ello introduce los términos latitud y longitud.

Sobre esta figura (actualización de una de las figuras (ver imagen 1)

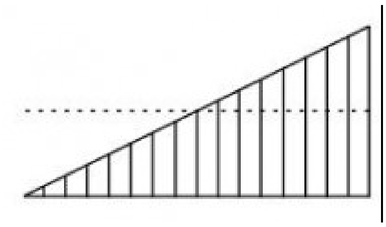


Figura 4

que aparecen en una edición de 1505 del *Tractatus de latitudinibus formarum*[8]) que corresponde al caso de un cuerpo que se mueve con un movimiento uniformemente acelerado, Boyer (2007, p. 339) explica el uso que Oresme hace de ella. Hemos esquematizando la explicación de la siguiente manera:

1º. Dibuja una gráfica tiempo-velocidad.

2º. Los puntos de la recta horizontal representan los sucesivos instantes de tiempo. Las *longitudes*, que equivalen a nuestras abscisas.

---

7 Por este motivo, según Boyer (2007, p. 340), Oresme no se dio cuenta de la otra parte del principio fundamental de la geometría analítica, toda curva plana puede representarse, respecto de un sistema de coordenadas, como una función de una variable.

8 Imagen del *Tractatus de latitudinibus formarum* (1505) obtenida en: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Oresmesdiagramsfullpage.gif

3º. Sobre la recta de *longitudes* traza para cada *longitud* un segmento perpendicular, la *latitud*, cuya longitud representa la velocidad en ese instante.

4º. Los extremos superiores de las *latitudes* están en una recta.

5º. Si el movimiento uniformemente acelerado parte del reposo, la totalidad de las ordenadas (segmentos velocidad) cubren el área de un triangulo rectángulo.

6º. El área representa la distancia recorrida.

7º. La velocidad en el punto medio del intervalo de tiempo es la mitad de la velocidad al final de dicho intervalo.

A pesar de la refutación de Ramírez, éste reconoce la contribución de Oresme al proceso de matematización y de visualización geométrica del tratamiento de las cualidades.

De hecho, la influencia de Oresme en Fermat y Descartes está generalmente aceptada. De la influencia en Fermat no cabe ninguna duda pues Fermat hace algunas referencias a los trabajos publicados por Oresme. En cuanto a Descartes, se considera muy probable que los conociera aunque él no cita sus fuentes.


De latitudinibus Nicholai hozen

Figura 5

1.3. SIGLO XVII: INICIO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA. LA ÉPOCA DE DESCARTES Y FERMAT.

Son muchos los historiadores de las matemáticas que consideran que la geometría analítica se inicia, de manera simultánea e independiente, a mediados del siglo XVII con Descartes y Fermat, y que dieron a las coordenadas (en realidad sólo utilizan una coordenada, la abscisa) su estatus definitivo.

Cada uno de ellos, como veremos en este punto, aporta una de las dos partes que conforman el principio fundamental de la geometría analítica. Descartes utiliza, fundamentalmente, las coordenadas para obtener la ecuación de una curva a partir de su representación gráfica en el plano. Fermat las utiliza, sobre todo, para representar el lugar geométrico correspondiente a toda ecuación de dos incógnitas.

El desarrollo del álgebra por Viète, publicado en 1591 en su obra *In artem analyticem isagoge*, simplificó la notación que contribuiría a este inicio del uso de coordenadas. Según Massa (2001, pp. 707-708) en esta obra, Viète puso de manifiesto las ventajas de utilizar símbolos dentro de las matemáticas, no solo para representar la incógnita, sino también para las cantidades conocidas. Para González (2007, p. 220) Viète estableció una conexión entre Álgebra y Geometría, al obtener las ecuaciones que corresponden a diversas construcciones geométricas, para problemas geométricos determinados, donde se utilizan solo ecuaciones determinadas, en que la variable, aunque sea una incógnita, es una constante fija a encontrar. A principios del siglo XVII algunos matemáticos, entre ellos Fermat y Descartes, comprobaron la eficacia de los métodos algebraicos para resolver problemas geométricos, en una época en la que la matemática está interesada en la recuperación, restauración y difusión de la matemática clásica griega. Una época en la que se traducen al latín e incluso a las lenguas vernáculas las obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Diofanto y Pappus. González (2007, pp. 219-220) afirma que "tanto la *Isagoge* de Fermat como *La Geometría* de Descartes tienen su anclaje en la Geometría Griega, pero se plantean como tarea esencial encontrar nuevos métodos más simples, más operativos, más resolutivos, más heurísticos y sobre todo más generales".

La publicación en 1637 del *Discurso del Método* de René Descartes es considerada por muchos de los historiadores como el inicio de la geometría analítica. Contiene tres apéndices, el último de ellos, *La Geometría* (*La Géométrie*), es un ensayo dividido en tres partes en el que aplica su método para resolver algunos problemas geométricos clásicos utilizando el álgebra desarrollada por Viète.

Pero, el álgebra de Viète, según De la Torre (2006, p. 83), estaba basada en la teoría de las magnitudes geométricas, creadas por los griegos y expuesta por Euclides. A saber, una variable correspondía a la longitud de un segmento rectilíneo, el producto de dos variables al área de un rectángulo, y el producto de tres variables al volumen de un paralelepípedo rectangular. En esta teoría era imposible dotar de significado al producto de cuatro variables o más. Además, expresiones como $x^2 + x$ no tenían sentido, ya que según el postulado de Arquímedes dos magnitudes no se podían comparar a menos que un múltiplo de una de ellas pudiera exceder a la otra. Por tanto no se podían sumar áreas con longitudes o con volúmenes.

En el primer libro de *La Geometría*, Descartes interpreta el producto de dos líneas como una línea y no un área:

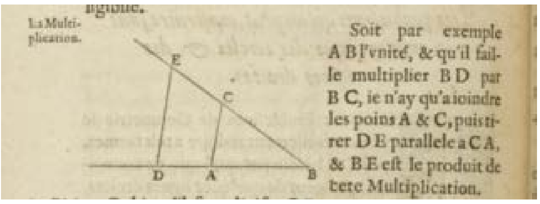
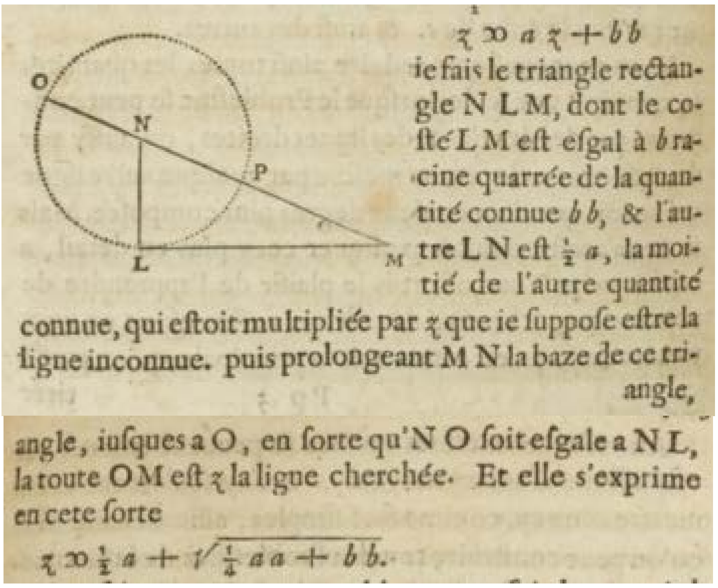


Figura 6

> Sea, por ejemplo, *AB* la unidad y que sea preciso multiplicar *BD* por *BC*; solamente debo unir los puntos *A* y *C*, trazando *DE* paralela a *CA*, siendo *BE* el resultado de esta multiplicación.

Lo que le permitió, a su vez, interpretar cualquier potencia como una longitud, es decir, reducir todas las magnitudes geométricas a magnitudes lineales, lo que propició aritmetizar la geometría. Sin embargo, la idea de Descartes era aplicar la geometría para resolver problemas aritméticos, la resolución de problemas para Descartes no consiste en encontrar una solución algebraica (o la ecuación algebraica), sino en la construcción geométrica de la solución[9]. La solución algebraica de la ecuación $z^2 = az + bb$ es $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ cuya longitud corresponde a la del segmento *OM* en la siguiente construcción geométrica:

[9] Por ello no está interesado en las soluciones negativas a las que llama "raíces falsas".



$z^2 \infty az + bb$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le costé L M est esgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui estoit multipliée par z que ie suppose estre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

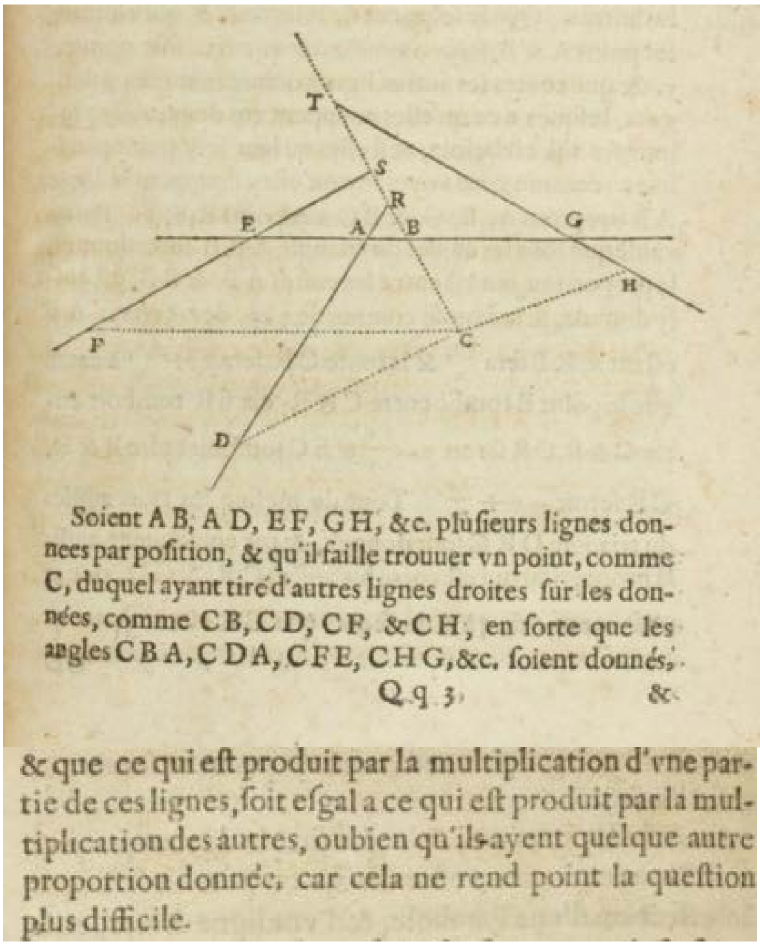
$$z \infty \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}.$$

Figura 7

Es decir, el problema queda resuelto cuando se construye un segmento cuya longitud sea la solución (o una curva cuando la solución sea una ecuación algebraica). Por ello, dentro de los cánones de la geometría euclidiana, no sólo interpreta geométricamente mediante magnitudes la multiplicación sino también el resto de operaciones algebraicas: adición, sustracción, división y la extracción de la raíz cuadrada.

Ahora bien, *La Geometría* no es un tratado sistemático de geometría analítica, sino un ensayo en el que pretende exhibir la eficacia de su método. Por ello empieza discutiendo un problema clásico de gran dificultad: el famoso Problema de Pappus, al que dedica 11 páginas.

La geometría griega ya había resuelto el problema para dos y tres rectas, Pappus había conjeturado que la solución para cuatro rectas sería una sección cónica pero no lo había demostrado. Descartes, según De la Torre (2006, pp. 84-85), encontró la solución algebraica (una ecuación de 2º grado) pero no aportó una prueba geométrica. También estudió el caso de cinco rectas, para el que encontró que el lugar buscado se podía representar por una ecuación algebraica de tercer grado (la llamada parábola cúbica de Descartes).



Soient A B, A D, E F, G H, &c. pluſieurs lignes données par poſition, & qu'il faille trouuer vn point, comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites ſur les données, comme C B, C D, C F, & C H, en ſorte que les angles C B A, C D A, C F E, C H G, &c. ſoient donnés,

Qq 3 &

& que ce qui eſt produit par la multiplication d'vne partie de ces lignes, ſoit eſgal a ce qui eſt produit par la multiplication des autres, oubien qu'ils ayent quelque autre proportion donnée, car cela ne rend point la queſtion plus difficile.

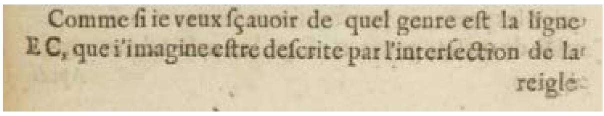
Figura 8

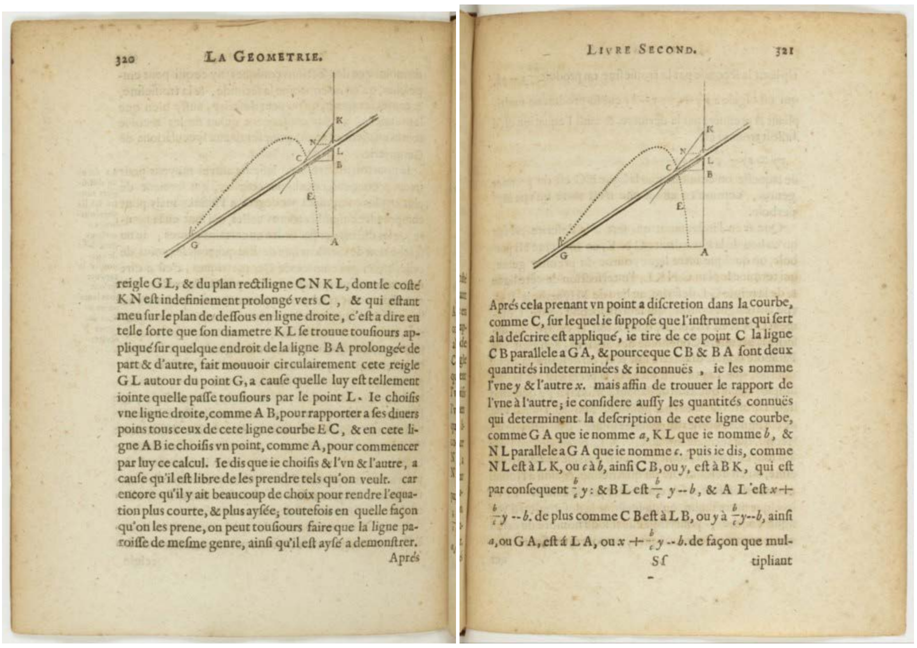
De la Torre (2006, p. 85) añade que se dice que este intento de resolver el problema general de Pappus es lo que llevó a inventar el método de la geometría analítica. Pero en ninguna de las 32 figuras que conforman la *Géométrie* aparecen las coordenadas. Simplemente, en palabras de De la Torre (2006, p. 85), “dado *X*, la ecuación de la curva permitía computar el *Y* correspondiente, y así obtenía un par de números (*X*,*Y*) asociado a un punto dado, de los cuales sólo *X* era tomado sobre un eje. El uso de los ejes se impuso por comodidad, no por necesidad lógica. Queremos destacar que Descartes nunca utilizó las coordenadas cartesianas en el sentido actual; utilizó las coordenadas en el sentido de las distancias para describir el lugar de una curva. Bell afirma acerca de esto:

> En detalles, la presentación de Descartes difiere de la actual. Así que él usó un eje-*x* y no se refirió al eje-*y*. Para cada valor de *x* él calculaba la *y* correspondiente de la ecuación, obteniendo así las coordenadas *x* e *y*. El uso de dos ejes, obviamente, no es una necesidad, sino una conveniencia. En

nuestra terminología, él utilizó el equivalente a dos ejes rectangulares y oblicuos.

En el segundo libro de *La Géométrie* titulado *De la nature des lignes courbes* realiza una clasificación de las curvas en algebraicas (a las que llama geométricas) y mecánicas. Clasifica las curvas geométricas según el grado de la ecuación que la describe. Por ello busca obtener una ecuación[10], siempre siguiendo las cuatro reglas[11] de su método basadas en el orden[12], que exprese la relación entre los puntos de una curva, obtenida por una construcción geométrica, y los puntos de una recta, a través de lo que podríamos denominar magnitudes coordenadas: segmentos (líneas rectas) que juegan el papel de coordenadas, como se puede apreciar en la obtención de la ecuación de la hipérbola:


Comme ſi ie veux ſçauoir de quel genre eſt la ligne E C, que i'imagine eſtre deſcrite par l'interſection de la reigle


320 LA GEOMETRIE.

reigle G L, & du plan rectiligne C N K L, dont le coſté K N eſt indefiniement prolongé vers C, & qui eſtant meu ſur le plan de deſſous en ligne droite, c'eſt a dire en telle ſorte que ſon diametre K L ſe trouue touſiours appliqué ſur quelque endroit de la ligne B A prolongée de part & d'autre, fait mouuoir circulairement cete reigle G L autour du point G, a cauſe quelle luy eſt tellement iointe quelle paſſe touſiours par le point L. Ie choiſis vne ligne droite, comme A B, pour rapporter a ſes diuers poins tous ceux de cete ligne courbe E C, & en cete ligne A B ie choiſis vn point, comme A, pour commencer par luy ce calcul. Ie dis que ie choiſis & l'vn & l'autre, a cauſe qu'il eſt libre de les prendre tels qu'on veult. car encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'equation plus courte, & plus ayſée, toutefois en quelle façon qu'on les prene, on peut touſiours faire que la ligne paroiſſe de meſme genre, ainſi qu'il eſt ayſé a demonſtrer.
Aprés

LIVRE SECOND. 321

Aprés cela prenant vn point a diſcretion dans la courbe, comme C, ſur lequel ie ſuppoſe que l'inſtrument qui ſert a la deſcrire eſt appliqué, ie tire de ce point C la ligne C B parallele a G A, & pourceque C B & B A ſont deux quantités indeterminées & inconnuës, ie les nomme l'vne y & l'autre x. mais affin de trouuer le rapport de l'vne à l'autre; ie conſidere auſſy les quantités connuës qui determinent la deſcription de cete ligne courbe, comme G A que ie nomme a, K L que ie nomme b, & N L parallele a G A que ie nomme c. puis ie dis, comme N L eſt à L K, ou c à b, ainſi C B, ou y, eſt à B K, qui eſt par conſequent $\frac{b}{c}y$: & B L eſt $\frac{b}{c}y - b$, & A L eſt $x + \frac{b}{c}y - b$. de plus comme C B eſt à L B, ou y à $\frac{b}{c}y - b$, ainſi a, ou G A, eſt á L A, ou $x + \frac{b}{c}y - b$. de façon que mul-
Sſ tipliant

Figura 9

[10] Sobre el método cartesiano ver Puig (2003), Puig (2004) y Puig (2008).

[11] Reglas de *El Discurso del Método* que podemos expresar de la siguiente forma: 1. No aceptar como verdadero lo que no ofrezca plena evidencia, evitando la precipitación y la prevención. 2. Dividir las dificultades en tantos elementos como sea necesario para resolverlas completamente. 3. Llevar los pensamientos en orden, procediendo de lo simple a lo complejo. 4. Hacer suficientes enumeraciones y revisiones para tener la seguridad de no omitir nada.

[12] "Si se quiere resolver un problema hay que considerarlo primero como ya resuelto y poner nombres a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las conocidas como a las desconocidas. Luego, sin hacer ninguna diferencia entre las conocidas y las desconocidas, se recorrerá la dificultad según el orden que muestre, con más naturalidad, la dependencia mutua de una y otras" Pasaje de *La Geometría* que en referencia al orden destaca De la Torre (2006, p. 80).

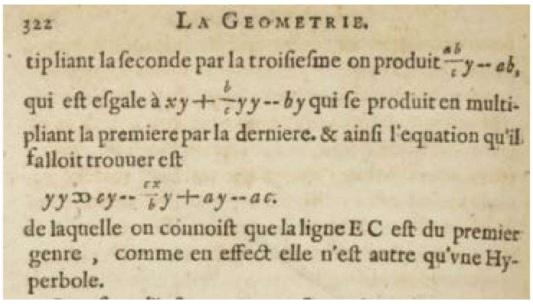

322 LA GEOMETRIE.
tipliant la ſeconde par la troiſieſme on produit $\frac{ab}{c}y - ab$,
qui eſt eſgale à $xy + \frac{b}{c}yy - by$ qui ſe produit en multi-
pliant la premiere par la derniere. & ainſi l'equation qu'il
falloit trouuer eſt
$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$
de laquelle on connoiſt que la ligne E C eſt du premier
genre, comme en effect elle n'eſt autre qu'vne Hy-
perbole.

Figura 10

Dedica el tercer y último libros de *Le Géométrie* a las ecuaciones polinómicas de grado superior a dos estableciendo sin demostración que el número de raíces de una ecuación es igual a su grado.

Compartimos la valoración que González Urbaneja (2007, p. 224) hace de *La Géométrie* de Descartes y nos parece un gran acierto por su parte la enumeración que hace de las limitaciones de la Geometría Griega que Descartes elimina en esta obra:

> *La Geometría* de Descartes transforma los antiguos instrumentos de la Geometría griega –el Álgebra Geométrica y el Análisis Geométrico– en lo que hoy llamamos la Geometría Analítica cartesiana, mediante la intervención del Álgebra literal a la que el propio Descartes contribuyó de forma definitiva con la contundente y eficaz reforma y simplificación de la notación algebraica.
>
> En concreto *La Geometría* de Descartes elimina de forma brillante toda una serie de limitaciones que el carácter sintético imponía a la Geometría griega:
>
> - Limitación pitagórica de la inconmensurabilidad.
> - Limitación platónica de los instrumentos geométricos –regla y compás–.
> - Limitación euclídea de la homogeneidad dimensional.
> - Limitación tridimensional.
> - Limitación de la dependencia de las figuras geométricas.
> - Limitación de la imposibilidad de asignar números a las figuras geométricas.
>
> Descartes realiza mediante la herramienta algebraica una nueva lectura de la Geometría de los griegos, que permite una completa reconstrucción de la

> Matemática sobre premisas muy sencillas no geométricas como en Euclides sino algebraicas. Y lo hace en el marco de un programa de reforma general de la Filosofía que había anticipado en *El Discurso del Método* y en las *Reglas para la dirección del espíritu*, pero muchos pensadores conceden mayor importancia a la reforma cartesiana de las Matemáticas que a su intervención en la Filosofía. Así parece deducirse, por ejemplo, de la siguiente frase de J. Stuart Mill (citada por E.Bell en *Les grands mathématiciens*. Payot, París, 1950. Cap.3. p.46):
>
>> "La Geometría analítica, mucho más que cualquiera de sus especulaciones metafísicas, inmortaliza el nombre de Descartes y constituye el máximo paso hecho en el progreso de las ciencias exactas".

Existe mucha controversia sobre la paternidad de la geometría analítica. Pero ¿quién comunicó primero sus resultados o en qué fecha exacta se publicaron sus obras? No es una cuestión que ataña a nuestro propósito el explorar cómo cada uno de ellos, con matices complementarios, obtiene los cimientos de la geometría analítica partiendo del mismo interés de sus predecesores, la reformulación de la geometría clásica, utilizando los mismos instrumentos, los métodos analíticos introducidos por Viète.

Fermat en su interés por la restauración de los clásicos se propuso, según Collette (1986, pp. 22-23) reconstruir los dos libros de Apolonio sobre los *Lugares planos* (*Plane Loci*) a partir de la *Colección matemática* de Pappus. Fermat trabajó sobre el problema de Apolonio de las circunferencias tangentes a tres circunferencias, que generalizó en términos de esferas tangentes a cuatro esferas dadas. Esta actividad le llevó en el año de 1629 a un estudio analítico de los máximos y los mínimos. Hacia 1636 escribió (aunque no se publicó hasta 1679) un ensayo corto, *Ad locos planos et solidos isagoge* (*Introducción a los lugares geométricos planos y sólidos* al que nos referiremos como *Isagoge*), en el que aplicó el análisis de Viète a los problemas de lugares geométricos, y presentó los principios fundamentales de la geometría analítica.

La *Isagoge* comienza con una alusión al hecho de que el estudio de los lugares geométricos no resultara fácil a los geómetras griegos por su incapacidad de enunciar el problema en una forma general. Así pues, Fermat se propone someter la teoría de los lugares geométricos a un análisis que indique el camino hacia un estudio general de los problemas de lugares. Análisis que inicia enunciando uno de los dos principios fundamentales de la Geometría analítica:

> Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades incógnitas, se tiene un lugar geométrico, describiendo el extremo de una de ellas una línea recta o curva.[13]

Fermat trata en primer lugar el caso más sencillo de una ecuación lineal:

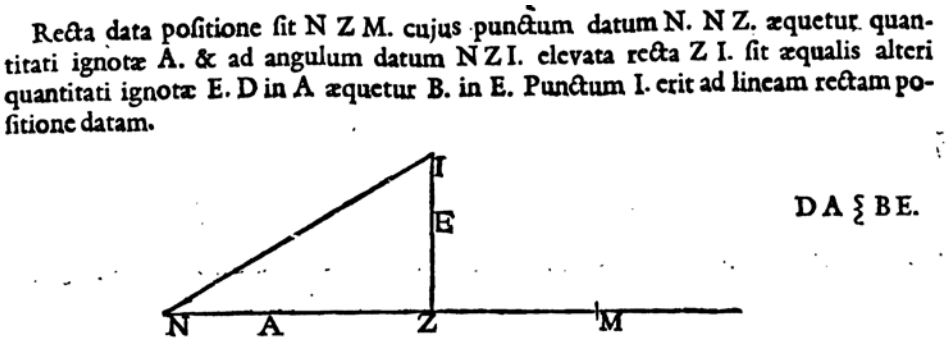

Recta data poſitione ſit N Z M. cujus punctum datum N. N Z. æquetur quantitati ignotæ A. & ad angulum datum N Z I. elevata recta Z I. ſit æqualis alteri quantitati ignotæ E. D in A æquetur B. in E. Punctum I. erit ad lineam rectam poſitione datam.

Figura 11

Utiliza las vocales *E* y *A* para representar, como lo había hecho Viète y utilizando la misma notación, las cantidades desconocidas. Partiendo de la semirrecta *NZM* (pues al igual que Descartes no utiliza cantidades negativas) donde *N* es fijo, toma *NZ* como la cantidad desconocida *A* y el segmento *ZI*, aplicado sobre la recta con un ángulo *NZI*, como igual a la otra cantidad desconocida *E*. Cuando "*D* in *A* æquatur *B* in *E*" es decir, $DA=BE$ donde *D* y *B* son constantes, el punto *I* describirá un lugar geométrico representado por la semirrecta *NI*.

La ecuación lineal más general de la forma $DA+BE=c^2$ (pues según Boyer, Fermat admitía el principio de homogeneidad de Viète) corresponde a la recta *MI* con $MZ=c^2/D-A$.

Tras este estudio, Fermat afirma que todos los problemas de lugares que incluyen una recta pueden ser descritos por esta ecuación lineal.

El segundo tipo de ecuación que presenta Fermat corresponde a la forma "*A* in *E*. æquatur *Z*. pl." que es la ecuación de la hipérbola, escrita en notación actual, $xy = k^2$.

[13] Traducción tomada de Boyer (2007, p. 437).

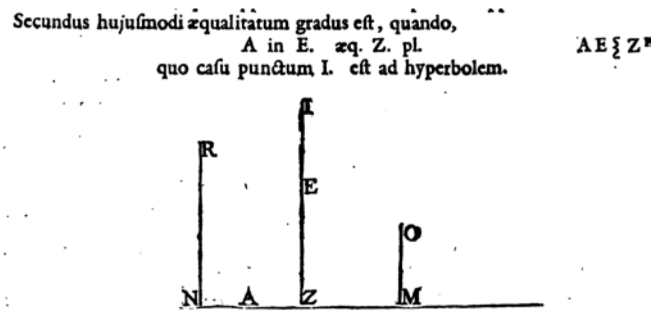


Figura 12

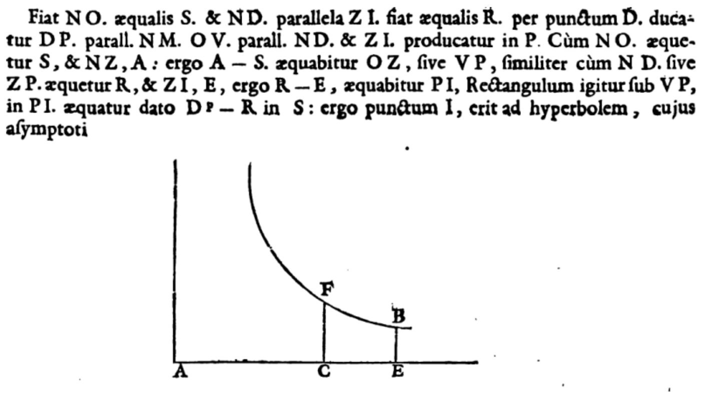


Figura 13

Sigue con las ecuaciones (que reproducimos en notación actual) que comprenden los cuadrados de las incógnitas, comenzando por $x^2 = y^2$. Esta ecuación y todas las que son homogéneas en x y en y representan una línea recta. Fermat demuestra también que $x^2=By$, $y^2=Dx$ y $b^2 \pm x^2=By$ son parábolas. Que $x^2+y^2+2Dx+2By=b^2$ es una circunferencia. Finalmente, tras demostrar que $b^2-x^2=ky^2$ es una elipse y que $b^2+x^2=ky^2$ es una hipérbola, estudia la ecuación más difícil de todas, la que contiene no sólo x e y, sino también xy. Analiza el caso $b^2-2x^2=2xy+y^2$ que, como demuestra, representa una elipse.

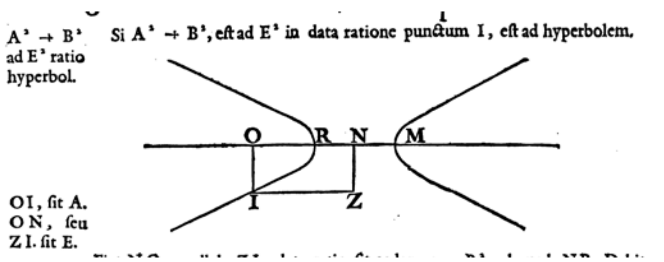


Figura 14

La *Isagoge* finaliza con una proposición trivial tras su exhaustivo análisis de las ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas, que según Boyer (2007, p. 438) Fermat consideraba el punto culminante de su tratado, en la que demuestra que para un número cualquiera de rectas, el lugar geométrico de un punto que verifique que la suma de los cuadrados de los segmentos trazados desde dicho punto a las rectas dadas formando con ellas un ángulo dado sea constante, es un lugar sólido. Fermat plantea esta cuestión en los siguientes términos:

> Dados dos puntos *N* y *M*, encontrar el lugar de puntos tal que la suma de cuadrados de *IN*, *IM* esté en una razón dada con el triángulo *INM*.

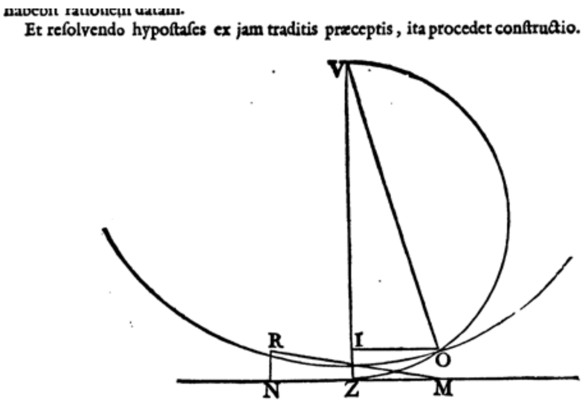


Figura 15

En el apéndice de la *Isagoge*, según Boyer (2007, p. 439), se encuentra "La resolución de problemas sólidos por medio de lugares geométricos", en el que Fermat muestra que las ecuaciones cúbicas y cuárticas determinadas se pueden resolver por medio de cónicas.

Resumiendo, Descartes y Fermat iniciaron la geometría analítica de forma independiente y simultánea al estudiar diferentes problemas de la geometría clásica mediante la nueva metodología que había propiciado el álgebra de Viète. Descartes incide sobre todo en la obtención de la ecuación de los lugares geométricos, y Fermat muestra mayor interés por el aspecto complementario, el estudio de las propiedades de la curva obtenida a partir de la ecuación, aunque ambos trataron los dos aspectos de la geometría analítica.

Según De la Torre (2006, pp. 86-87):

> Descartes clasificó las curvas algebraicas según sus grados, estableció también que los puntos de intersección de dos curvas pueden encontrarse resolviendo simultáneamente sus ecuaciones, de donde se infiere que una

infinidad de curvas distintas pueden estar referidas a un mismo sistema de coordenadas. Este resultado, que le abre la puerta a la más amplia generalidad, no fue vislumbrado por ninguno de los antecesores de Descartes en el uso de las coordenadas, y no hay nada en los trabajos de Fermat que muestre que este matemático lo hubiera alcanzado. Sin embargo, el enfoque que le dio Fermat a la geometría analítica era más completo y sistemático que el de Descartes, hasta el punto de haberle permitido a Fermat obtener las ecuaciones generales de la recta, el círculo con centro en el origen, la elipse, la parábola y la hipérbola rectangular referida a las asíntotas como ejes, desde 1629, es decir, 8 años antes de la publicación del *Discurso del método*.

Según González (2007, p. 222):

> En un sentido general, se puede decir que la invención de la Geometría Analítica por Descartes consiste en la extensión del Arte Analítica de Vieta a la construcción geométrica de las soluciones de ecuaciones indeterminadas, mientras que para Fermat fue el estudio de los lugares geométricos mediante el Arte Analítica de Vieta. Abundando en ello, digamos que mientras Descartes empieza con la curva correspondiente a un lugar geométrico de la que deriva la ecuación del lugar, es decir, resuelve problemas geométricos a través de la construcción de la solución geométrica de ecuaciones, Fermat inversamente parte de una ecuación algebraica de la que deriva las propiedades geométricas de la curva correspondiente. En sus propias palabras, Descartes se refiere con frecuencia a la generación de curvas "mediante un movimiento continuo y regular", mientras Fermat menciona la frase: "Sea una curva dada por su ecuación...". Las visiones de Descartes y Fermat son, en cierto modo, complementarias, estableciendo cada una de ellas el nexo entre Álgebra y Geometría en sentidos opuestos. Descartes estudia ecuaciones por medio de curvas, mientras Fermat estudia curvas definidas por ecuaciones.
>
> La Geometría que desarrollan Fermat y Descartes, que al cabo de doscientos años se empezó a llamar Geometría Analítica, estudia dos tópicos fundamentales: la derivación de las ecuaciones de los lugares geométricos y el estudio de las propiedades de las curvas –sobre todo las definidas por

> ecuaciones lineales y cuadráticas– mediante el Álgebra. Sintetizando, diríamos que Descartes se ocupó ampliamente del primer tópico y consideró brevemente algunos aspectos del segundo, mientras que Fermat desarrolló el segundo tópico y prestó somera atención al primero.

Pero la demora en la publicación de la *Isagoge* de Fermat y la dificultad de La *Géométrie* de Descartes fueron, probablemente, los motivos que provocaron que el método de las coordenadas no comenzase a desarrollarse hasta que van Schooten publicara en 1649 una versión en latín de La *Géométrie*. Tras la cual, el propio Van Schooten y otros matemáticos como De Witt, Wallis, La Hire, L'Hôpital, Newton…, desarrollaron, perfeccionaron y difundieron el uso de las coordenadas.

1.4. SIGLO XVIII: DE DESCARTES A EULER, CON LAS FIGURAS DESTACADAS DE NEWTON Y EULER.

Es necesario matizar antes de iniciar este apartado que las coordenadas todavía no se conciben como un par ordenado sino como magnitudes (coordenadas geométricas o magnitudes coordenadas).

1.4.1. EL CÁLCULO EN EL SIGLO XVIII.

Desde finales del siglo XVII el uso de las coordenadas en el desarrollo del cálculo infinitesimal fue clave en el desarrollo de la geometría analítica. Veremos en este apartado qué tipo de coordenadas se utilizaban durante esta época en Europa (Francia, Alemania, Italia y Gran Bretaña). Basaremos este estudio en la tesis de Mónica Blanco Abellán (2004)[14], que aunque verse sobre cálculo diferencial del siglo XVIII (de Leibniz a Lacroix), por el tipo de estudio realizado, basado en el tipo de curvas que trataron y el tipo de coordenadas que utilizaron, facilita el estudio de la influencia del cálculo en el desarrollo de la geometría analítica. En concreto, en el desarrollo de las coordenadas como herramienta metodológica en el estudio de las propiedades de las curvas: máximos y mínimos, tangentes, cuadraturas, curvaturas…

Blanco (2004, p. 17) inicia su estudio exponiendo el contexto geométrico del cálculo de Leibniz. Afirma que el objetivo de Leibniz es crear un método (dentro del marco del análisis cartesiano) con fórmulas y reglas de cálculo para calcular cuadraturas,

[14] En el anexo V se recogen en una tabla parte de las conclusiones de Mónica Abellán. Aquellas que hacen referencia al tipo de coordenadas utilizadas en los textos que ha mirado. Teniendo en cuenta, las curvas estudiadas, qué lenguaje se utiliza, cómo se considera la función, si se considera curva o función, a quién va dirigida y su principal influencia.

tangentes… de curvas, cuyo concepto fundamental es el de cantidad *variable* geométrica (como la ordenada, la abscisa, el arco, el radio, la subtangente…).

Durante el siglo XVII la curva implicaba relaciones entre variables geométricas expresadas mediante ecuaciones (curvas algebraicas) o basadas en construcciones geométricas (curvas transcendentes). Pero en ningún caso la relación entre las variables era funcional. La curva no era una gráfica de una función como la entendemos en la actualidad, sino la relación entre dos variables geométricas que debían conservar la homogeneidad dimensional (y cuando esto presentaba dificultades se utilizaba la proporcionalidad).

Según Blanco (2007, p. 24), la falta de rigor matemático se debe a la falta de definiciones adecuadas y a la tendencia general de basar las matemáticas en conceptos geométricos. La aritmética no es lo suficiente abstracta y simbólica para asumir este papel. El número se sigue interpretando como una razón de magnitudes geométricas. A pesar de que tanto fluxiones como diferenciales se expresan en términos algebraicos, solo se consideran como procesos convenientes en la resolución de problemas geométricos. Será Euler quien dará (en la *Introductio*) una base formal, no geométrica, al cálculo incorporándolo a una teoría más general (de las funciones). Él fue el primero en dar a la función un papel central y en proponer un estudio sistemático y una clasificación de las funciones elementales. La notación de Leibniz se adaptaba bien a la definición de función de Euler, lo que propició el desarrollo durante el siglo XVIII del cálculo de Leibniz.

Recorreremos esta época a través de las figuras. De las conclusiones de Blanco (2007) tomaremos, en primer lugar, las que hacen referencia a las coordenadas utilizadas, según las curvas tratadas, con anterioridad a la publicación en 1755 de *Institutiones calculi differentialis*. En concreto, aunque de algunos de ellos no hemos conseguido imágenes de sus figuras, vamos a mirar los libros siguientes:

1691-1692 (1742)[15] Johann Bernoulli: *Lectiones de calculo differentialium*.[16]

1696 L’Hôpital: *Analyse des infiniment petits pour l’intelligence des lignes courbes*.

1706 Ditton: *An Institution of Fluxions*

[15] Aunque las lecciones de Johann Bernoulli no se publicaron hasta 1742, hemos tenido en cuenta el año en que se las ofreció a L’Hôpital. Hemos incluido a Bernoulli por la influencia de este en la obra de L’Hôpital. La discusión y comparación de sus trabajos se puede ver en Blanco (1999), (2004).
[16] Publicada en 1922 por Paul Schafheitlin.

1708 Reyneau: *Analyse démontrée*

1713-1715 Wolff: *Elementa analyseos*

1742 Maclaurin: *A Treatise of Fluxions*

1748 Agnesi: *Instituzione Analitiche*

1748 Euler: *Introductio*

1750 Simpson: *The Doctrine and Application of Fluxions*

1755 Euler: *Institutiones calculi differentialis*

Y especialmente a los autores que tuvieron más repercusión en la obra de Lacroix.

- L'Hôpital y Bernoulli.

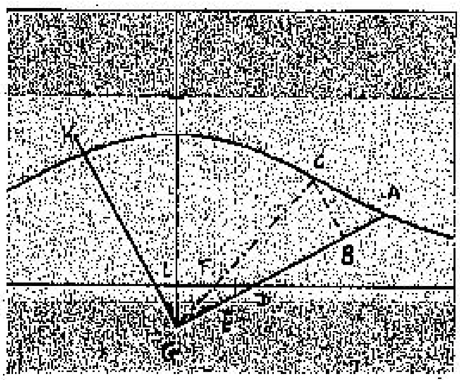
Las lecciones de Bernoulli son apuntes para clases particulares, pero *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*[17] iba dirigido a un público más amplio, por lo que este libro contiene más definiciones y axiomas fundamentales. Blanco (2004, pp. 47-48) considera que las diferencias más notables entre ambos es la elección de las coordenadas. En general, Bernoulli utiliza coordenadas ortogonales (aunque utiliza coordenadas polares para la espiral y coordenadas desde un punto), lo que le permite obtener para las curvas algebraicas ecuaciones más claras y sencillas que L'Hôpital que elige las coordenadas según la naturaleza de la curva. En cambio, en el caso de curvas transcendentes, el uso de las coordenadas ortogonales hace el problema más complicado y da expresiones más oscuras, mientras que L'Hôpital busca relaciones de naturaleza geométrica para estudiar las propiedades de la curva, lo que le permite elegir mejor las coordenadas en cada caso.

Ambos utilizan coordenadas desde un punto para obtener la tangente a la concoide. Blanco (1999, pp. 68-72; 2004, pp. 371-375):

[17] Considerado el primer libro de texto de cálculo diferencial. (Blanco,1999, pp. 12-15)

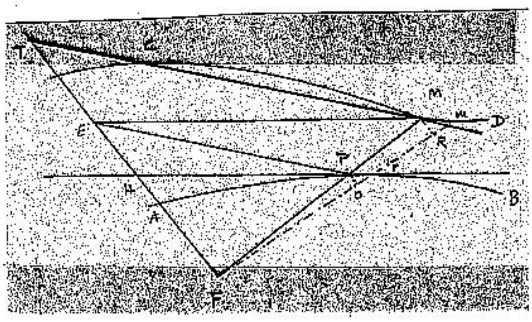
<table>
<tr>
<td>Según Bernoulli:

Bernoulli dedica el problema VII a troba
tangent a la concoide de Nicomedes, enc
que només estudia la branca super
Seguint la construcció de Nicomedes:
$a=GL$,
$b=CF=AD$,
$x=GD$,
$dx=DE=AB$.


</td>
<td>Según L'Hôpital:

<u>Proposició VI (Secció II)</u>:
Sigui APB una corba de la qual sabem traçar la tangent PH; F un punt fix exterior a la corba; i una altra corba CMD tal que per a qualsevol recta FPM, la relació entre FP i FM ve donada per una equació. S'ha de buscar la tangent MT pel punt M.

Sigui FHT perpendicular a FM.
$s=FH$,
$x=FP$, $dx=Op$,
$y=FM$, $dy=mR$.


</td>
</tr>
</table>

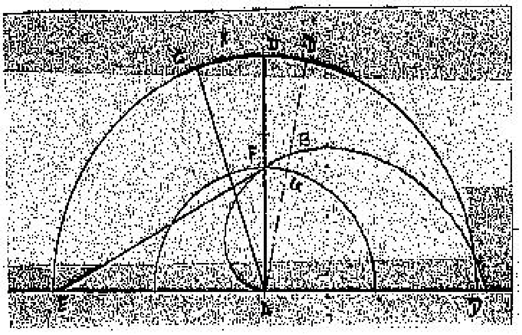
Los dos utilizan coordenadas polares en el problema de la tangente a la espiral. Los dos utilizan como variables el arco y el radio. (Blanco, 1999, pp. 81-84; 2004, pp. 381-384).

<table>
<tr>
<td>

Según Bernoulli:

El problema XI està dedicat al cas de l'espiral d'Arquimedes.

Sigui a el radi AC, b la longitud de la perifèria $DDCD$ i $x = AF$.



</td>
<td>

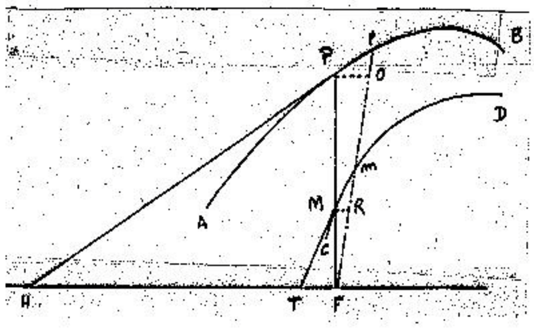
Según L'Hôpital:

Per al cas general enuncia la següent proposició:

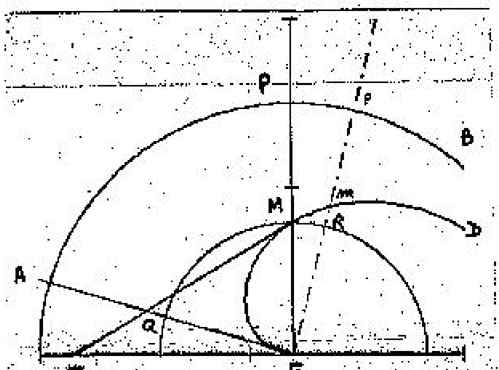
<u>Proposició V(Secció II)</u>:

Sigui APB una corba, amb A fix, de la qual sabem trobar la tangent PH. Sigui F un altre punt fix i CMD una altra corba tal que, agafant una recta FMP, la relació entre FM i AP ve donada per una equació.

S'ha de trobar la tangent MT des de M.



<u>Exemple</u>: Si prenem APB un cercle de centre F, PH serà paral·lel i igual a FH, és a dir, t=s. En aquest cas, la corba CMD és l'espiral d'Arquimedes.[17]



Així doncs:

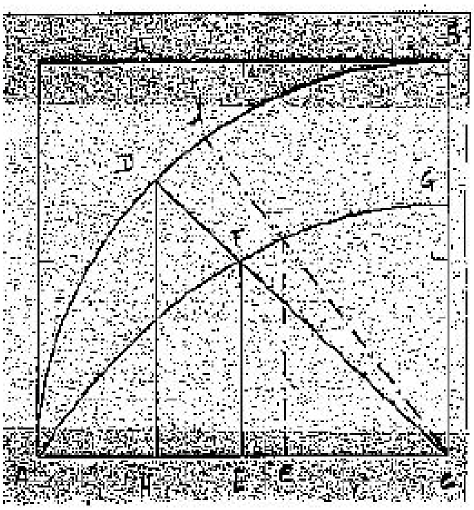
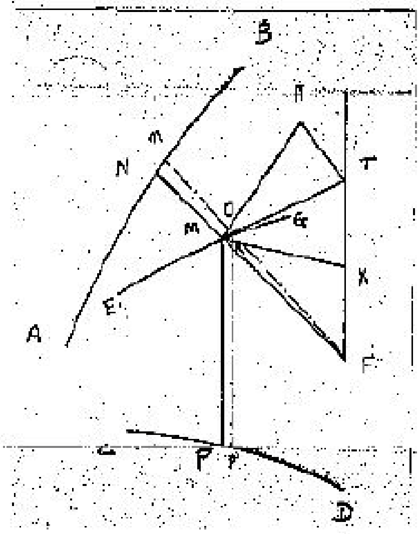
x=arc(AP),

y=FM,

z=FP=a.

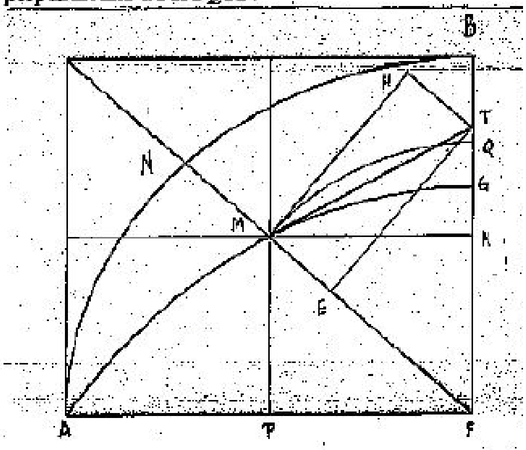
</td>
</tr>
</table>

En el problema de la tangente a la cuadratriz, Bernoulli utiliza coordenadas ortogonales y L'Hôpital polares. (Blanco, 1999, pp. 77-80; 2004, pp. 377-381).

Según Bernoulli:	Según L'Hôpital:
Aquesta corba queda caracteritzada de la següent forma: $$\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}.$$ Bernoulli li dedica el problema IX de les seves *Lectiones*. a=AC, b=AB, x=AH, f= arc(AD), HC=a-x. 	<u>Proposició IX (Secció II)</u>: Donades les corbes ANB i CPD; la recta FKT; A, C, F punts fixos. Sigui EMG una corba tal que, per a qualsevol recta FMN, MP és paral·lel a FK. La relació de l'arc(AN) amb l'arc(CP) ve donada per l'equació. Busquem la tangent MT, amb M punt sobre EG.  Sigui TH paral·lel a FM i les rectes MRK i MOH paral·leles a les tangents en P i en N, respectivament. Sigui $FmOn$ infinitament proper a FMN, amb mRp paral·lel a MP. s=FM, t=FN, u=MK, x=arc(CP), dx=arc(Pp)=MR, y=arc(AN), dy=arc(Nn).

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Exemple: Sigui ANB un quart de cercle amb centre F (fix) i CPD el radi APF perpendicular a $FKGQTB$.



$a=AF$, $b=ANB$,

$x=AP$,

$y=\text{arc}(AN)$,

$u=FP=MK=a\text{-}x$,

$t=FN=a$.

</td>
</tr>
</table>

- Ditton

No hemos conseguido figuras de Ditton. *An Institution of Fluxions* está escrito para ayudar a los estudiantes que no dominan esta materia. El lenguaje utilizado es generalmente geométrico, considera que cualquier curva se puede generar a partir del movimiento compuesto de un punto. Generalmente utiliza coordenadas ortogonales. Clasifica las curvas según si las ordenadas son paralelas o si parten de un punto (como la espiral).

- Reyneau

Analyse démontrée, ou Méthode de résoudre les problèmes des mathématiques et d'apprendre facilement ces sciences está compuesto por dos volúmenes. El segundo, dedicado a los problemas geométricos y físico-matemáticos que se pueden resolver utilizando el álgebra, el cálculo diferencial y el cálculo integral, está dirigido a los principiantes, para que descubran las principales propiedades de todas las curvas. Utiliza el lenguaje geométrico en la primera parte, en la que considera el movimiento como generador de curvas, ángulos, figuras. En la resolución de los problemas utiliza el lenguaje algebraico, pues afirma que es más útil. Generalmente utiliza las coordenadas ortogonales, pero comenta que las fórmulas dadas también sirven para cualquier ángulo entre coordenadas. En ocasiones utiliza coordenadas desde un punto.

Tomaremos las figuras de la segunda edición de 1738, versión aumentada y comentada de Varignon.

DE L'ANALYSE,
OU
LA MANIERE DE L'APPLIQUER
à découvrir les proprietés des figures de la Geometrie simple & composée, à resoudre les Problêmes de ces sciences & les Problêmes des sciences Physico-mathematiques, en employant le calcul ordinaire de l'Algebre, le calcul differentiel & le calcul integral. Ces derniers calculs y sont aussi expliqués & démontrés.

DEDIÉ À MONSEIGNEUR LE DUC DE BOURGOGNE.

Par le R. P. REYNEAU, *Prêtre de l'Oratoire.*

SECONDE EDITION,

Augmentée des Remarques de M. de Varignon.

TOME II.

A PARIS,
Chez QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université, rue Galande près la Place Maubert, à l'Annonciation.

M. DCC. XXXVIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Figura 16

En el siguiente párrafo, introduce las coordenadas cartesianas:

DANS toutes les courbes qu'on peut réduire à une équation qui en exprime la proprieté, la ligne droite *AB* à laquelle on raporte tous les points de la courbe, s'appelle *la ligne des coupées* ou *des abscisses*, & la changeante *AB*, *Ab*, &c. s'appelle *la coupée* ou *l'abscisse*; le point fixe *A* s'appelle *l'origine*. Les paralleles *BC*, *bC*, &c. s'appellent *les ordonnées* ou *les appliquées*: & comme l'on a vû qu'on pouvoit prendre aussi les coupées sur *AG* paralleles aux ordonnées, & les ordonnées sur *ABB*, chaque *AB* & sa correspondante *BC* s'appellent *les coordonnées*; & les deux lignes *ABB*, *AG* qui se coupent à l'origine *A*, les lignes des *coordonnées*; & l'angle *GAB* qu'elles font ensemble, *l'angle des coordonnées*; & les quatre angles *GAB*, *GAH*, *gAH*, *BAg*, qu'elles FIG. XVI.

Figura 17

font enſemble à l'origine A, ſont *les quatre angles des deux lignes des coordonnées.*

Figura 18

La ecuación de la parábola

FIG. XIX. LA parabole ACc dont l'axe eſt ABb, le parametre $AP = p$, les $x = AB$, Ab; les $y = BC$, bc, a pour équation $yy - px = 0$. La ligne droite SCc, en ſuppoſant $SA = a$; AT parallele à BC menée par A égale à b; & prenant les x ſur AB du même point A d'où l'on prend les x de la parabole, aura pour abſciſſe $SB = a + x$, & pour ordonnée $BC = y$, & pour équation $\frac{ab+bx}{a} = y$; d'où l'on tire $x = \frac{ay-ab}{b}$; ſi l'on met cette valeur de x dans l'équation de la parabole, on aura la troiſiéme équation $yy - \frac{apy-abp}{b} = 0$, dans laquelle

y a deux valeurs poſitives, * qui ſont celles des deux ordonnées BC (y), bc (y), menées des deux points C, c où la droite SCc, dont l'équation eſt $x = \frac{ay-ab}{b}$, coupe la parabole ACc, dont l'équation eſt $yy - px = 0$; leſquelles deux ordonnées communes à la droite & à la parabole, ſont devenues déterminées par la commune interſection de la droite & de la parabole.

Cet exemple ſuffit pour faire clairement concevoir le principe, & pour faire voir en même tems quelle en eſt la raiſon; avec quelle juſteſſe l'Analyſe s'accorde avec la Geometrie, & comment elle fait découvrir avec le ſeul calcul les proprietés des figures les plus compoſées jointes les unes avec les autres, & comment réciproquement la Géometrie exprime par ſes figures les reſolutions des Problêmes découvertes par l'Analyſe; c'eſt ce qu'on verra mieux par l'uſage que l'Analyſe fait de ce principe.

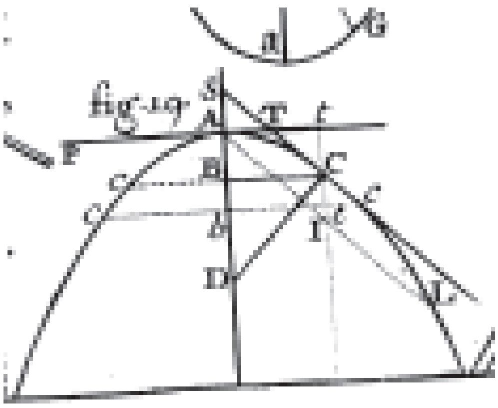


Figura 19

La espiral en coordenadas polares.

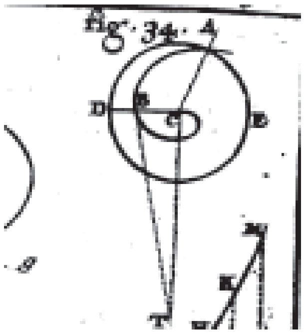


Figura 20

La exponencial sin presencia del eje de ordenadas.

Par exemple, en nommant x les abſciſſes *AC*, *AE*, &c. FIGURE XXXVI.

depuis l'origine *A*, & y les ordonées *CD*, *EF*, &c. & une grandeur conſtante a; ſuppoſé que la courbe *BDFH*, &c. s'exprime par cette équation $a^x = y$, quelques-uns la nomment *exponentielle*, d'autres *parcourante*; de même $x^x = y$, ou $x^y = y$, $x^x = y$, ſont des équations de courbes parcourantes.

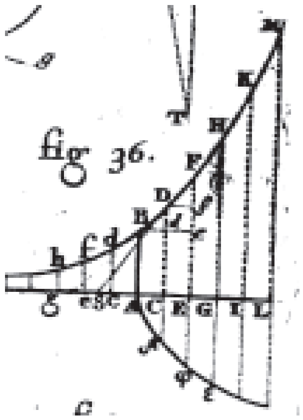


Figura 21

- Wolff

En 1710 publica *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften*, cuya versión latina es *Elementa Matheseos Universae* (1713-1715) e incluye los *Elementa Analyseos Infinitorum tradit.* La intención de Wolff era popularizar todos los campos del conocimiento humano de una manera clara y metódica, tomando como modelo el método matemático. Utiliza un lenguaje geométrico y coordenadas generalmente ortogonales. En la cisoide toma coordenadas ortogonales como Bernoulli; en la concoide, coordenadas ortogonales cuya abscisa está tomada desde el punto máximo de la curva; y también calcula, como L'Hôpital, los puntos de flexión contraria, tomando coordenadas desde un punto.

- Maclaurin

Fue un gran defensor de las ideas matemáticas y físicas de Newton, por ello intentó hacer un estudio crítico y comprensible de sus ideas. Escribió *A Treatise of Fluxions* para defender el cálculo de Newton del ataque de Berkeley. En el primer libro del tratado utiliza los métodos de la geometría clásica y el método de exhaución de Arquímedes para dotar de rigor el cálculo newtoniano. En el segundo libro, siguiendo la línea del continente, presenta el cálculo de Newton desde un punto de vista algebraico. Este tratado fue muy alabado por Lacroix por su carácter geométrico-algebraico; también recibió las alabanza de Euler, Clairaut, D'Alambert, Lagrange,…Aunque no lo hace explícito, generalmente trabaja con coordenadas ortogonales, pero también con coordenadas desde un punto.

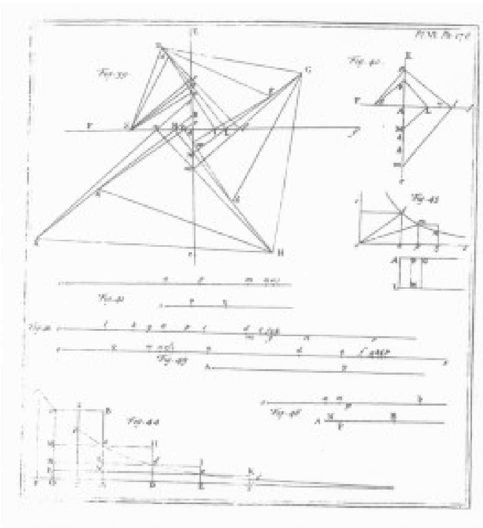


Figura 22

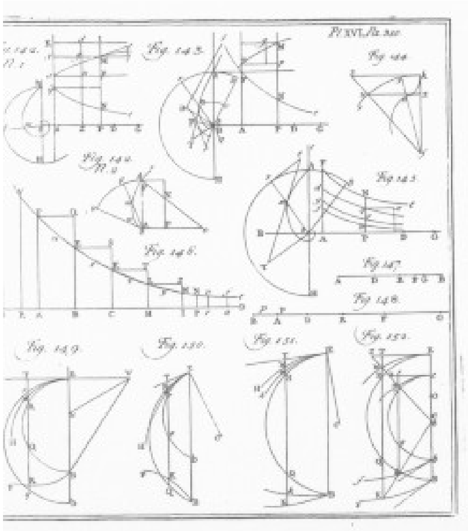


Figura 23

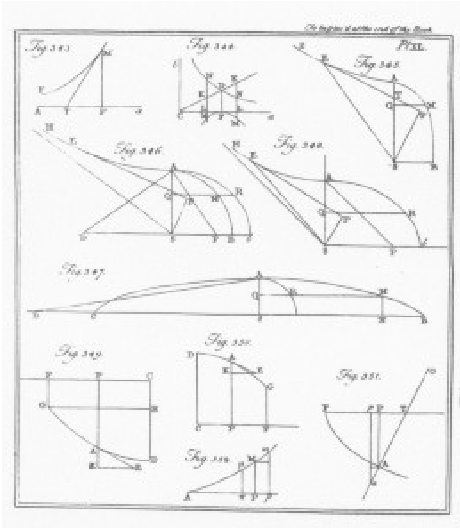


Figura 24

- Agnesi

La fama de Agnesi radica en el hecho de ser mujer en una época en la que era una rareza y una sorpresa que una mujer tuviera conocimientos tan profundos sobre análisis. De hecho, es la primera mujer del mundo occidental que se puede considerar matemática.

Instituzione Analitiche ad uso della gioventú italiana, escrito en el dialecto toscano y editado en una impresión privada, está dedicado para ayudar a los jóvenes italianos. Es un libro ordenado y claro, pero poco original e incluso obsoleto ya que no estudia los últimos descubrimientos. Lagrange, en *Principj*, recomienda estudiar el libro de Agnesi antes de abordar materias superiores.

En la primera parte utiliza un lenguaje geométrico y habla del movimiento continuo como generador de las curvas. Para resolver las cúbicas que aparecen en los problemas de intersección de las ramas, utiliza el método cartesiano. Utiliza coordenadas desde un punto y coordenadas ortogonales, aunque afirma que las ordenadas pueden formar cualquier ángulo con las abscisas.

Presentamos la única curva que se comenta en los libros de historia de las matemáticas, conocida por *La curva de Agnesi*, o *versiera*[18].

PROBLEMA III.

238. *Dato il ſemicircolo* ADC (Fig. 135.) *del diametro* AC ; *ſi ricerca fuori di eſſo il punto* M *tale , che condotta* MB *normale al diametro* AC , *che taglierà il circolo in* D , *ſia* AB , BD :: AC *alla* BM , *e perchè infiniti ſono i punti* M , *che ſoddisfanno al problema , ſe ne dimanda il luogo .*

Sia M uno di queſti punti , e chiamata $AC = a$; $AB = x$, $BM = y$, ſarà , per la proprietà del circolo ,

ANALITICHE. 381

lo , $BD = \sqrt{ax - xx}$, e per la condizione del problema , ſarà AB , BD :: AC , BM , cioè x , $\sqrt{ax - xx}$ :: a , y ; e però $y = \frac{a\sqrt{ax - xx}}{x}$, o ſia $y = \frac{a\sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}$, equazione alla curva da deſcriverſi , che diceſi la *Verſiera* .

Poichè $AB = x$, $BM = y$, ſarà AC l'aſſe delle x , ed AQ , parallela alla BM , l'aſſe delle ordinate y . Si ponga primieramente $x = 0$, ſarà $y = \infty$, e però AQ l'aſintoto della curva . Sia $y = 0$, ſarà $a\sqrt{a - x} = 0$, e però $x = a$; quando adunque ſia $x = a$, la curva taglierà l'aſſe AC , e paſſerà per conſeguenza per lo punto C , che ne ſarà il vertice . Sia $x = AR = \frac{a}{2}$, ſarà $y = a$; ſia $x = AP = \frac{3a}{4}$, ſarà $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; ſia $x = AF = \frac{4a}{5}$, ſarà $y = a\sqrt{\frac{1}{4}}$. Poſta x maggiore di a , la quantità ſotto il ſegno radicale ſarà negativa , e la curva immaginaria . Per vedere ſe la curva ſia concava , o conveſſa all'aſſe AC , ſi faccia la proporzione : come $CP = \frac{a}{4}$ (che corriſponde alla $x = \frac{3a}{4}$) alla $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, così $CF = \frac{1}{5}a$ (che corriſponde alla $x = \frac{4a}{5}$) al quarto , che ſarà $\frac{4a}{5}\sqrt{\frac{1}{3}}$; ma la $x = \frac{4a}{5}$ ci dà $y = a\sqrt{\frac{1}{4}}$, e $\frac{4a}{5}\sqrt{\frac{1}{3}}$ è minore di $a\sqrt{\frac{1}{4}}$, adunque ſarà la curva concava all'aſſe AC ; ma per l'aſin-

[18] Agnesi la llamó la curva de la versiera, que significa "giro" en italiano. Cuando el libro fue traducido al inglés, el traductor confundió la palabra "versiera" con la palabra "avversiera", que significa bruja, así que llamó a la curva *la bruja de Agnesi*. En http://it.wikipedia.org/wiki/File:Agnesi.gif se puede ver una la construcción de la curva.

382 INSTITUZIONI

l'aſintoto AQ deve anche eſſere conveſſa, adunque ſarà in parte concava, ed in parte conveſſa, e però avrà un fleſſo contrario, il quale ſi troverà col metodo da darſi a ſuo luogo; e perchè, preſa la x negativa, è negativa la quantità ſotto il vincolo radicale del denominatore, cioè immaginaria la y, perciò la curva ſarà, come ſi vede nella *Fig.* 135. avvertendo, che eſſa curva à un ramo ſimile, ed eguale al ramo CLM, dalla parte delle y negative.

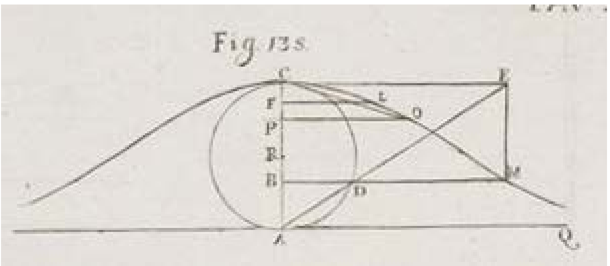


Figura 25

Dada una circunferencia se fija un punto, *A*, se elige otro punto de la circunferencia, *D*, y se traza la recta secante *AD*. Se traza la recta tangente al punto *C*, punto diametralmente opuesto a *A*. Las rectas *AD* y la tangente a *C* se cortan en el punto *E*. La recta paralela *AC* por el punto *E* y la perpendicular por *D* se cortan en el punto *M*. La curva se construye por el movimiento del punto *M* al variar el punto *D*, cuya ecuación en el texto de Agnesi es $y = \frac{a\sqrt{ax-xx}}{x}$ o $y = \frac{a\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$. Teniendo en cuenta que *x* en el texto de Agnesi es la ordenada e *y* la abscisa; (el parámetro *a*, el diámetro de la circunferencia) la ecuación en notación actual sería $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ cuya representación[19] para el caso *a* = 3 es:

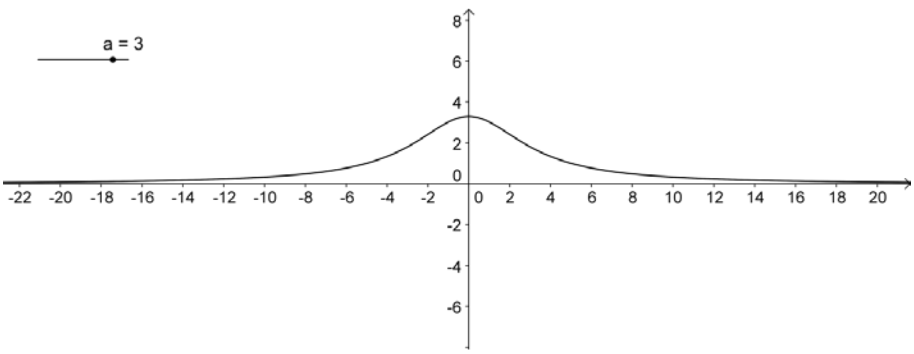


Figura 26

[19] En el anexo XI se pueden apreciar los cambios que sufre la curva al variar el parámetro.

- Simpson

Sus libros de texto tuvieron mucho éxito en Gran Bretaña y en el Continente. *The Doctrine and Application of Fluxions* consta de dos partes. En la primera utiliza un lenguaje geométrico, las magnitudes se generan por movimiento continuo, aunque aparecen comentarios de carácter algebraico. Hay problemas que los resuelve desde dos formas, geométricamente y algebraicamente; pero considera que la resolución mediante fluxiones es más corta. En una nota comenta que la comparación de x y x cuadrado desde el punto de vista algebraico evita el problema de homogeneidad. Aunque acepta los fundamentos cinemáticos de Maclaurin, no está de acuerdo con la utilización excesiva de la geometría. Para las curvas algebraicas utiliza coordenadas ortogonales. En las espirales utiliza el arco y el radio. Para la cicloide, como L'Hôpital (El *Analyse* es el primer libro de cálculo que leyó), elige las abscisas sobre el arco de la circunferencia generadora. En general, aplica el método de fluxiones a la teoría de curvas.

- Euler

Blanco (2004, pp. 264-287) dedica un capítulo de su tesis para Euler por su trascendencia en el desarrollo del cálculo y su internacionalidad y liberarlo de las fronteras geográficas. Se basa fundamentalmente en el texto de 1755 *Institutiones calculi differentialis*, y dado que la *Introductio* es parte central de este trabajo, sólo haremos un breve resumen.

Euler escribe las para los que se inician en el cálculo. *Institutiones calculi differentialis* se basa en el estudio de la dependencia de las variables y por tanto de las funciones que define, en este texto, de la siguiente manera: si x es una variable, todas las cantidades que dependen de x, o que quedan determinadas a través de ella se llaman *funciones de x*. Utiliza un lenguaje algebraico (trabaja con funciones) y no presenta ninguna figura.

Pero, ¿qué ocurre en Europa tras la publicación de estas dos obras de Euler? Analizaremos la repercusión en las obras de cálculo la publicación de las *Institutiones calculi differentialis* y la *Introductio*, especialmente en el uso de coordenadas sistematizadas en el tomo II, hasta la publicación de los libros de texto tras la Revolución Francesa, libros que analizaremos en el siguiente apartado. En concreto, miraremos:

1759 Lagrange: *Principj di analisi sublime*

1760 Kästner: *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*

1770 Tempelhoff: *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*

1775 Saladini: *Compendio d'analisi*

1786 Karsten: *Anfangsgründe der mathematischen Analysis und höhern Geometrie*

- Lagrange: época italiana.

Los *Principij di analisi sublime* (1759) no trascendieron las fronteras italianas, se trata de un libro inédito que se no difundió hasta 1987 por Bogato y Pepe[20]. Está dedicado a los estudiantes de la Reggie Scuole di Artiglieria de Turín donde Lagrange fue profesor desde 1755 hasta 1766. Escrito en italiano, como exigía la escuela, trata sobre cálculo diferencial e integral. La primera parte está dedicada a la teoría algebraica de las curvas. La segunda parte, trata sobre el cálculo diferencial e integral. Utiliza un lenguaje más algebraico que geométrico. Distingue entre líneas regulares, cuyos puntos se determinan por una ley constante; y, líneas irregulares, puntos al azar que no son objeto de la geometría. En la primera parte presenta la interpretación y construcción de las ecuaciones, una curva es el lugar geométrico cuya ecuación relaciona. Luego identifica ecuación con curva, de manera que las propiedades de la curva se pueden deducir de su ecuación. Generalmente utiliza coordenadas ortogonales y aplica cambios de sistemas de coordenadas. Solamente trata curvas algebraicas. Los *Principij di analisi sublime* representan una etapa importante en el proceso de sistematización de Lagrange sobre los fundamentos de análisis que culminará en 1797 con la publicación de la *Théorie des fonctions analytiques*.

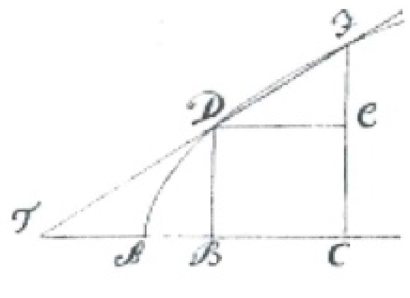


Figura 27

[20] Citado en Blanco (2004, p. 402): Borgato, Maria Teresa-Pepe, Luigi (1987). Lagrange a Torino (1750-1759) e le sue lezione inedite nelle Reale Scuole di Artiglieria. *Bolletino di Storia delle Scienze matematiche, II.*

- Kästner

Durante la mayor parte de su vida fue profesor de matemáticas. Publicó gran cantidad de tratados y principios. *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* está dedicado, en general, a los estudiantes de matemáticas; y, en particular, a sus alumnos.

Cuando estudia los extremos distingue una función uniforme de otra que no lo es, apreciamos aquí la influencia de la clasificación de funciones de Euler[21].

Utiliza un lenguaje algebraico, trabaja con funciones, define el límite, utiliza desarrollos en serie,…Pero considera la curva como polígono de infinitos lados y algunas de sus demostraciones tienen una base geométrica.

En general, utiliza coordenadas ortogonales para las curvas algebraicas y según su naturaleza para las transcendentes. Para la espiral elige las coordenadas polares.

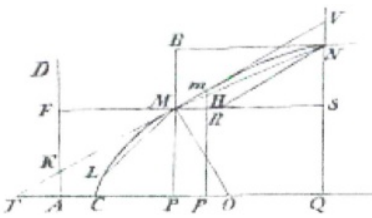


Figura 28

- Tempelhoff

Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen está dedicada a los estudiantes de la Real Artillería Prusiana de la que era profesor. La primera parte trata sobre cálculo diferencial; utiliza funciones, desarrollos en serie, el teorema de Taylor y habla del límite de proporciones. Se puede considerar que utiliza un lenguaje algebraico.

Aunque afirma que las coordenadas pueden formar cualquier ángulo, utiliza generalmente coordenadas ortogonales; no difiere el tratamiento de curvas algebraicas y transcendentes pues, define las transcendentes mediante su desarrollo en serie de potencias. También utiliza coordenadas polares. En el caso de las funciones trigonométricas considera el arco como variable independiente.

[21] El anexo VI contiene una breve descripción sobre la clasificación de funciones en la *Introductio*.

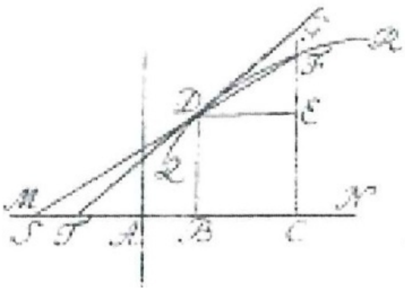


Figura 29

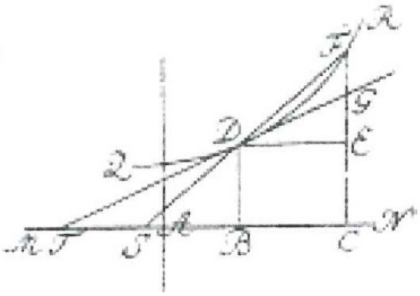


Figura 30

- Saladini

Saladi fue profesor de análisis y miembro del Instituto de la Ciencia de Bolonia y maestro de la Real Academia de Cadetes de Su Majestad Siciliana. Entre 1765 y 1767 publico *Institutiones analyticae*[22] en colaboración con Riccati, su profesor en Bolonia. En 1775 publicó *Compendio d'analisi* que presenta muchos ejemplos y figuras comunes con *Institutiones analyticae*. Además el contenido general de los dos libros es el mismo.

Riccati y Saladini consideran que la curva se genera a partir del movimiento continuo de un punto que sigue la tangente: un punto de la curva lleva velocidad constante como si se estuviera moviendo sobre la tangente, la velocidad en la dirección de la ordenada. Sin embargo, en parte su lenguaje también es algebraico pues trabajan con funciones. Generalmente utilizan coordenada ortogonales, aunque también utilizan en ocasiones coordenadas oblicuas (para expresar la subtangente, la fórmula del radio osculador) y coordenadas desde un punto (la espiral).

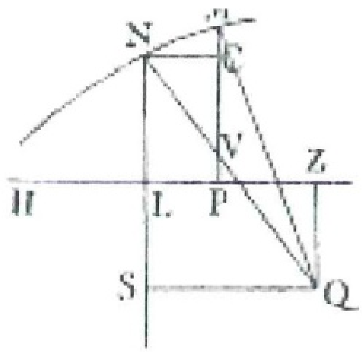


Figura 31

- Karsten

Es muy probable que *Anfangsgründe der mathematischen Analysis und höhern Geometrie* estuviera dedicada a los alumnos de las universidades de Rostock y de Halle,

[22] Se puede considerar como el primer tratado extenso sobre cálculo integral anterior a la publicación de las *Institutiones calculi integralis* de Euler. Tuvo gran difusión y notoriedad. (Blanco, 2004, p. 195)

en las que Karsten fue profesor. En el texto hace referencia a Bernoulli, a L'Hôpital y a Euler.

De los tres autores alemanes estudiados, Karsten es el más algebraico. No considera el movimiento para definir curvas como la cicloide, la cuadratriz o la espiral. Trabaja con funciones, utiliza el desarrollo en serie, el teorema de Taylor y la razón diferencial y define el límite. Y, aunque incluye figuras no son tan necesarias como en los otros dos autores para el seguimiento de la teoría.

Generalmente escoge las coordenadas como Bernoulli o L'Hôpital. Utiliza las coordenadas ortogonales para todas las curvas, algebraicas y transcendentes; aunque en el caso de la cuadratriz primero utiliza las polares que después pasa a ortogonales. También incluye fórmulas para la transformación de coordenadas oblicuas a ortogonales.

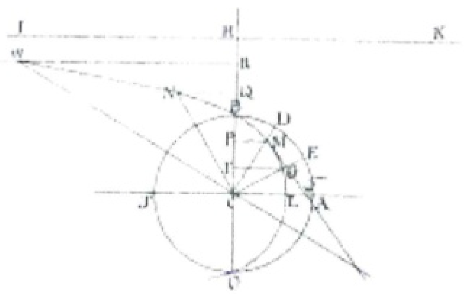


Figura 32

Resumiendo, L'Hôpital, Wolff, Reyneau, Agnesi y Saladini fundamentan el cálculo diferencial, bajo la influencia de Leibniz, en las diferencias infinitamente pequeñas. Todos estudian las curvas clásicas y, mientras que L'Hôpital, Wolff, y Agnesi todavía utilizan las coordenadas según la naturaleza de la curva, Reyneau, y Saladini tienden a considerar coordenadas ortogonales.

Los tratados de Euler influyen en las obras de Lagrange, Kästner y Tempelhoff. Lagrange define función de manera análoga a Euler en la *Introductio*, Kästner y Tempelhoff no definen función pero dan la clasificación de las funciones en uniformes y multiformes; en algebraicas y transcendentes como Euler. Solamente Kästner elige las coordenadas según la naturaleza de las curvas, el resto utiliza generalmente coordenadas ortogonales. Las curvas clásicas ya no aparecen ni en la obra de Euler ni en la de Tempelhoff.

En Gran Bretaña, Ditton, Maclaurin y Simpson se basan en el movimiento como generador de los fluentes y utilizan el método de las fluxiones de Newton. Blanco (2004, p. 363) confirma la confusión en los textos de Wolff, Agnesi, Salidini e incluso de Euler y de Maclaurin. Los franceses no utilizan fluxiones.

A partir de 1750 existe una tendencia general de tomar coordenadas ortogonales, a veces sin hacerlo de manera explícita como es el caso de Lagrange, a partir de 1755 será habitual el tratamiento las curvas algebraicas generales.

El análisis de los textos franceses lo haremos en el punto 2.5. Antes queremos analizar cómo utiliza las coordenadas Newton en un texto que podemos considerar de geometría analítica: *Enumeratio linearum tertii ordinis*.

1.4.2. NEWTON: *ENUMERATIO LINEARUM TERTII ORDINIS*.

El tratado de Newton sobre la enumeración de las líneas de tercer grado contribuyó al desarrollo de la geometría analítica siguiendo el tratamiento iniciado por Descartes.

Hemos consultado dos ediciones de la *Enumeratio linearum tertii ordini* que no son exactamente iguales:

- La edición original en latín de 1704, publicada como primer apéndice de *Opticks*.
- La que han publicado en 2003 la Real Sociedad Matemática Española y la SAEM Thales en el volumen *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias, con una enumeración de las líneas de tercer orden*. .

Esta edición reciente es un facsímil del ejemplar de la primera edición de William Jones (1711) *De Analysis Per Quantitatum Series, Fluxiones, ac Differentias: cum Enumeratione Linearum Tertti Ordinis* conservado en el Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando, traducido por José Luis Arantegui Tamayo y anotado por Antonio José Durán Guardeño.

La edición de William Jones contiene además del tratado *Del análisis mediante ecuaciones infinitas* y la *Enumeración de las líneas de tercer orden*, otros dos tratados, *De la cuadratura de curvas* y el *Método de las diferencias* (tratado inédito), así como fragmentos de cartas.

El volumen de la RMSE y Thales contiene también tres artículos:

- “Newton: el grande entre los grandes”, por José Manuel Sánchez Ron.

- “Valores contrapuestos en la controversia Newton-Leibniz”, por Javier Echevarría.
- “Newton y el Analysis”, por J. Durán Guardeño[23].

La diferencia entre los dos textos proviene del hecho de que William Jones adquirió en 1708 un lote de documentos de John Collins (fallecido 25 años antes) entre los que encontró una copia manuscrita de Collins de *De Analyse per aequationes numero terminorum infinitas*. Jones descubrió que su autor era Newton y le solicitó licencia para publicarlo, Newton no sólo se la concedió sino que le prestó su propio manuscrito para que lo cotejara y le dio permiso para publicar el resto de tratados. La controversia Newton-Leibniz sobre la primacía del cálculo concretó los fragmentos de las cartas que Jones decidió incluir.

Esta edición fue la base de las ediciones posteriores a lo largo del siglo XVIII, destaca por la calidad de los dibujos. Según Rouse Ball en el estudio que realizó en 1891 sobre la clasificación newtoniana de las cúbicas:

> De todas las ediciones, esta es la más placentera de usar, los tipos de letras, los dibujos, la impresión toda es excelente.[24]

A finales de la década 1660-1670, Newton comienza sus investigaciones en geometría analítica y hacia 1670 se propone la difícil tarea de realizar una clasificación de las cúbicas imitando la clasificación de Descartes de las cónicas[25]. Hasta el estudio de Newton se conocían cinco ejemplos de cúbicas:

- La cisoide de Diocles
- El tridente cartesiano
- El folio cartesiano
- La parábola cúbica (estudiada por Wallis)
- La semiparábola cúbica (estudiada por Neill/Heuraet)

Lo primero que hizo Newton fue reducir mediante un cambio de coordenadas la ecuación general de las cúbicas

$$ax^3 + bx^2 + cx + d + ey + fy^2 + gy^3 + hx^2y + kxy^2 + lxy = 0$$

[23] Este apartado está basado en el artículo y las notas de Durán.
[24] Citado por Durán (2003), p. III.
[25] Durán destaca la importancia que tuvo la *Géométrie* en la formación de Newton.

a cuatro ecuaciones, que modificará en la clasificación final. Dividió cada ecuación en casos, cada caso en especies, cada especie en formas, y cada forma en grados, obteniendo en total cincuenta y ocho tipos distintos de cúbicas, que aparecen en el texto todos dibujados. Sin embargo, la clasificación era incompleta.

En 1679 Newton retoma la clasificación y simplifica la ecuación general, mediante una transformación afín de los ejes coordenados

$X = ax + by + c$; $Y = a'x + b'y + c'$ con $ab' - a'b \neq 0$

a los cuatro casos siguientes:

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

que serán los casos definitivos. Cada caso lo dividió en clases, cada clase en géneros y cada género en especies. Y mostró que "todas las cúbicas pueden ser generadas por la sombra que proyectan sobre un plano infinito las cinco parábolas cúbicas divergentes al ser iluminadas desde un punto" (Durán, 2003, p. CXXXIX).

Después guardó los resultados en un cajón que no rescató hasta 1695, fecha en la que el tratado adquirirá su redacción definitiva y que se publicaría con el título de *Enumeratio linearum tertii ordinis*[26] en 1704. Finalmente las cúbicas aparecen divididas en 72 especies, pero esta clasificación tampoco es completa. "A Newton se le escaparon 6 especies que serían descubiertas a lo largo del siglo XVIII por J. Stirling, F. Nicole, N. Bernouille, De Gua de Malves y E. Stone. Aparte de la incompletitud, la clasificación newtoniana adolece de dos objeciones mayores: por un lado, en ninguna parte se especificaba lo que había que entender por especie –Newton usó el término, además, de forma poco consistente–; por otro, las curvas en cada grupo no tienen las mismas características fundamentales –como por ejemplo, ser invariantes por proyecciones– (Rouse Ball, 1891: 113)" (Durán, 2003, p. CXL).

Duran (2003, pp. 165-167) afirma que Newton no definió ni especificó qué entendía por especie, y añade que cada especie queda formada por una mezcla de propiedades

[26] A partir de ahora nos referiremos a la *Enumeratio linearum tertii ordinis* como la *Enumeratio*.

geométricas y algebraicas. Analiza detalladamente las propiedades que Newton utiliza para clasificar las cúbicas y concluye que agrupa en una misma especie cúbicas que no son equivalentes mediante transformación afín de los ejes coordenados.

La importancia de la *Enumeratio* no se empezó a comprender hasta que James Stirling publicó en 1717 *Lineae tertii ordinis neutonianae* donde demostraba la mayor parte de los resultados de Newton[27] y encontró cuatro de las seis cúbicas que le faltaban. Esta obra marcó los sucesivos trabajos sobre cónicas, como los del segundo tomo de la *Introductio*.

Pero, ¿cómo elige las ordenadas y las abscisas en la *Enumeratio*?

A lo largo de la *Enumeratio* no hace mención explícita de los ejes de coordenadas, sin embargo *Del Análisis Mediante Ecuaciones Infinitas* comienza estableciendo, de manera muy similar a Fermat, abscisas y ordenadas perpendiculares para la representación gráfica de funciones, aunque en ningún momento utilizará la expresión ejes de coordenadas.

> Sea aplicada la perpendicular *BD* a la base *AB* de una curva cualquiera, *AD*: y llámese *AB* = *x*, y *BD* = *y*; (Newton, 2003, p. 12)

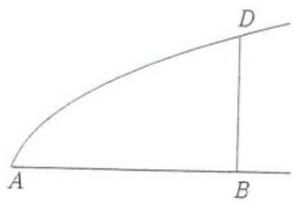
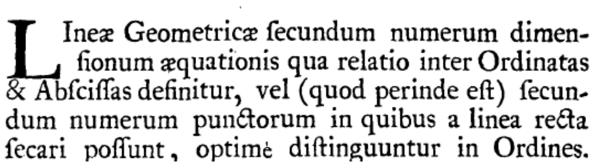


Figura 33

[27] Newton no incluye la demostración de sus resultados, y por ello recibe multitud de críticas o explicaciones. Durán (2003, p. CXXXIX) menciona críticas y explicaciones como las siguientes:

> "un catálogo de resultados, y es posible que fuera publicada, más que para exponerlos, para establecer la prioridad de Newton sobre ellos. No se da ninguna prueba de las proposiciones" (Rouse Ball, 1891, p. 105).
>
> Cramer escribió: "Es fastidioso que el señor Newton se haya contentado con exhibir sus descubrimientos sin añadir las demostraciones, y que haya preferido el placer de hacerse admirar al de instruir" (Talbolt, 1860, p. vi).
>
> Según Talbot: "Caben, sin embargo, pocas dudas de que el objetivo de Newton al publicar precipitadamente su tratado fue la vindicación de la prioridad de su descubrimiento ante la rapacidad de autores que se habían apropiado de algunos de sus teoremas." (Talbot, 1860, pp. vi-vii).
>
> Durán cree ver también "un rechazo implícito a la geometría analítica de Descartes: no se me ocurre homenaje mejor a la geometría analítica –y su potencia como herramienta matemática- que una *Enumeratio* escrita con el suficiente detalle. Claro está que el odio que Newton acabó profesando a Descartes, comenzando hacia 1680 cuando inició su viraje hacia la matemática sintética griega, y a toda su producción científica, bien pudo inducirle a mermar este homenaje, publicando una reducidísima versión de la *Enumeratio* donde cualquier presencia explícita de la geometría analítica había sido convenientemente purgada"

Estas coordenadas geométricas son las que, sin establecer explícitamente, utilizará en la enumeración de las líneas de tercer orden. La *Enumeratio* comienza con una clasificación de las líneas geométricas en órdenes según la dimensión de la ecuación que relaciona ordenadas y abscisas, o según el número de puntos en que pueden ser cortadas por una línea recta[28].



Lineæ Geometricæ ſecundum numerum dimenſionum æquationis qua relatio inter Ordinatas & Abſciſſas definitur, vel (quod perinde eſt) ſecundum numerum punctorum in quibus a linea recta ſecari poſſunt, optimè diſtinguuntur in Ordines.

Figura 34

Clasificación que concreta en:

- Líneas de primer orden: la recta
- De segundo orden: secciones cónicas y círculo
- De tercer orden o cúbico:
  - parábola cúbica
  - parábola neiliana
  - cisoide clásica
  - restantes de esta enumeración

Excluyendo la recta que no se debe considerar curva, clasifica las curvas en géneros equiparándolas con las líneas:

- ✓ Curva de primer género es lo mismo que la línea de segundo orden.
- ✓ Curva de segundo género es lo mismo que la línea de tercer orden.

Termina con la clasificación con las líneas de orden infinito que define como aquellas que una recta puede cortar en infinitos puntos.

- Las líneas de orden infinito son:
  - La espiral
  - La cicloide
  - La cuadratriz
  - Toda línea generada por revoluciones infinitas de radios o ruedas

[28] Según Durán, acaba de aparecer una implícitamente el teorema fundamental del álgebra (al menos en el caso real). Newton está afirmando que un polinomio de grado *n*, puede tener, y en algunos casos tiene, *n* raíces reales. (Newton, 2003, p. 147)

En el segundo capítulo, titulado *Las propiedades de las secciones cónicas conciernen a las curvas de género superior,* extiende, sin demostración, las propiedades de las cónicas a las cúbicas de forma muy parecida a como lo había hecho Apolonio en *Las Cónicas*. Tras definir *ordenada, diámetro*[29], *vértice, centro* y *eje* en el caso de las cónicas, da las definiciones para las cúbicas, como puede verse en el texto siguiente, que citamos *in extenso*.

III. *Curvarum secundi generis Ordinatæ, Diametri, Vertices, Centra, Axes.*

Nam si rectæ plures parallelæ & ad conicam sectionem utrinq; terminatæ ducantur, recta duas earum bisecans bisecabit alias omnes, ideoq; dicitur *Diameter* figuræ & rectæ bisectæ dicuntur *Ordinatim applicatæ* ad Diametrum, & concursus omnium Diametrorum est *Centrum* figuræ, & intersectio Curvæ & diametri *Vertex* nominatur, & diameter illa *Axis* est cui ordinatim applicatæ insistunt ad angulos rectos. Et ad eundem modum in Curvis secundi generis, si rectæ duæ quævis parallelæ ducantur occurrentes Curvæ in tribus punctis: recta quæ ita secat has parallelas ut summa duarum partium ex uno secantis latere ad curvam terminatarum æquetur parti tertiæ ex altero latere ad curvam terminatæ, eodem modo secabit omnes alias his parallelas curvæq; in tribus punctis occurrentes rectas, hoc est, ita ut summa partium duarum ex uno ipsius latere semper æquetur parti tertiæ ex altero latere. Has itaq; tres partes quæ hinc inde æquantur, *Ordinatim applicatas* & rectam secantem cui ordinatim applicantur *Diametrum* & intersectionem diametri & curvæ *Verticem* & concursum duarum diametrorum *Centrum* nominare licet. Diameter autem ad Ordinatas rectangula si modo aliqua sit, etiam *Axis* dici potest, & ubi omnes diametri in eodem puncto concurrunt istud erit *Centrum generale*.

Figura 35

Definiciones de la edición de 1704

> Y de igual modo, en las curvas de segundo género, si se llevan dos rectas paralelas cualesquiera que concurran con la curva en tres puntos: la recta que corta esas paralelas de modo que, sumadas las dos partes que terminan en la curva a uno de los lados de esa línea que las corta, igualen a la parte tercera que termina en la curva por su otro lado, esa recta, digo, que cortará a todas las demás paralelas y rectas concurrentes con la curva en tres puntos de idéntico modo, esto es, de tal suerte que la suma de las partes a uno de sus lados iguale siempre a la parte tercera, en el otro. Y así, vale denominar a estas tres partes que así se igualan *ordenadas*, y a la recta secante de la que son ordenadas, *diámetro*, y a la intersección de diámetro y curva, *vértice*, y a la concurrencia de dos diámetros, *centro*. Y además, al diámetro rectangular

[29] Durán (Newton, 2003, p. 148) anota que *ordinatim* es un adverbio que en César por ejemplo, se utiliza para las casas de dos pisos, por *órdenes* o por *niveles*. Incluye una nota del traductor: "Las ordenadas, descritas por un lego, son *alturas* desde una raya horizontal".

a las ordenadas, si alguno hubiere, podría llamársele asimismo *eje*; y cuando los diámetros concurran en el mismo punto, será un *centro general*. (Newton, 2003, pp. 149-150)

En el capítulo III, reduce la ecuación general de una curva de segundo género a cuatro casos. Los casos 1 y 2 corresponden a curvas con ramas hiperbólicas, los casos 3 y 4 curvas con ramas parabólicas[30].

CASO 1. Si las ramas son de género hiperbólico.

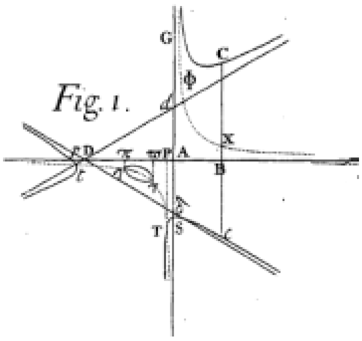


Figura 36. Figura de la edición de 1704

A partir de la asíntota, *GAS*, de las dos ramas, traza una recta paralela cualquiera *CBc* que termina en la curva por ambos lados que bisecciona en el punto *X*. El lugar geométrico de *X* será la hipérbola cónica, $X\phi$, cuyas asíntotas son *AG* y *AB*. Llamando *x* a la abscisa *AB* e *y* a la ordenada *BC*, la ecuación que define la relación entre *x* e *y* es:

$$xyy + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

De nuevo, según Durán (2003, p. 157) Newton ejecuta aquí, al igual que en los otros tres casos, un cambio de ejes de coordenadas (que no tienen por qué ser perpendiculares) aunque sin mencionarlo explícitamente. En este caso toma como ejes de coordenadas las asíntotas de la hipérbola cónica que ha construido.

CASO 2. Si *CBc* solo concurre en un punto con la curva.

A partir de la asíntota *AS* traza una recta cualquiera de posición dada que concurre con la asíntota en el punto *A* y otra *BC* paralela a la asíntota y que concurre con la curva en el punto *C*. La ecuación que relaciona la ordenada *BC* con la abscisa *AB* siempre será de la forma:

[30] El anexo XII contiene cuatro archivos de GeoGebra, en cada uno de ellos se puede analizar los cambios que generan la variación de los parámetros de las cuatro formas canónicas que Newton utiliza para clasificar las líneas de tercer orden.

$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

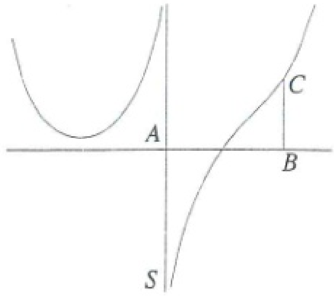


Figura 37

CASO 3. Si las ramas opuestas son de género parabólico.

Traza en la zona de las ramas una recta *BCc* que corte a la curva en dos puntos de manera que *B* sea el punto medio, el lugar geométrico del punto *B* es una recta. Fija en esta recta un punto cualquiera A y toma como ordenada BC y como abscisa AB y sin demostración, como siempre, afirma que la ecuación será siempre de la forma:

$$yy = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

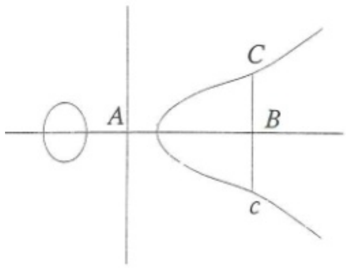


Figura 38

CASO 4. Si *CBc* solo concurre en un punto con la curva.

Toma la abscisa en una recta *AB* de posición dada y como ordenada *BC* y afirma que la ecuación que define la relación entre la ordenada y la abscisa siempre será de la forma:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

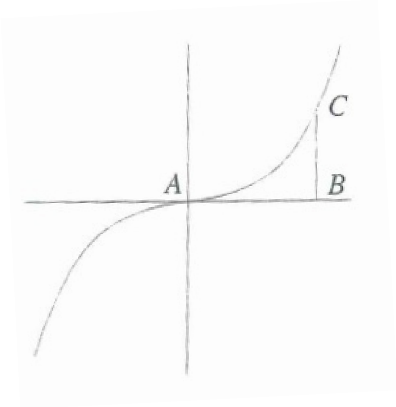


Figura 39

Resumiendo, las coordenadas utilizadas en la *Enumeratio* para reducir toda curva de segundo género a cuatro casos de ecuaciones son coordenadas geométricas fijadas, mayoritariamente, a posteriori. Según cada uno de los casos, elige los ejes de coordenadas adecuados para obtener las cuatro formas canónicas. En una nota Durán reproduce lo que Whiteside escribió al respecto de la reducción a las cuatro formas canónicas:

> La deducción semigeométrica de estas cuatro formas canónicas reducidas de la ecuación cúbica cartesiana, aunque válida, tiene un cierto aire de juego malabar matemático, y no es sorprendente que sus contemporáneos manifestaran sus sospechas sobre ella cuando apareció, por primera vez, en 1704. Por dos ocasiones en años anteriores había Newton, en privado, dedicado considerables esfuerzos para producir este cuarteto de ecuaciones mediante transformaciones apropiadas de los ejes de coordenadas. (Newton, 2003, p. 160)

Ahora bien, tras la reducción Newton comienza la enumeración de las 72 especies y dibuja cuidadosamente una curva de cada tipo.

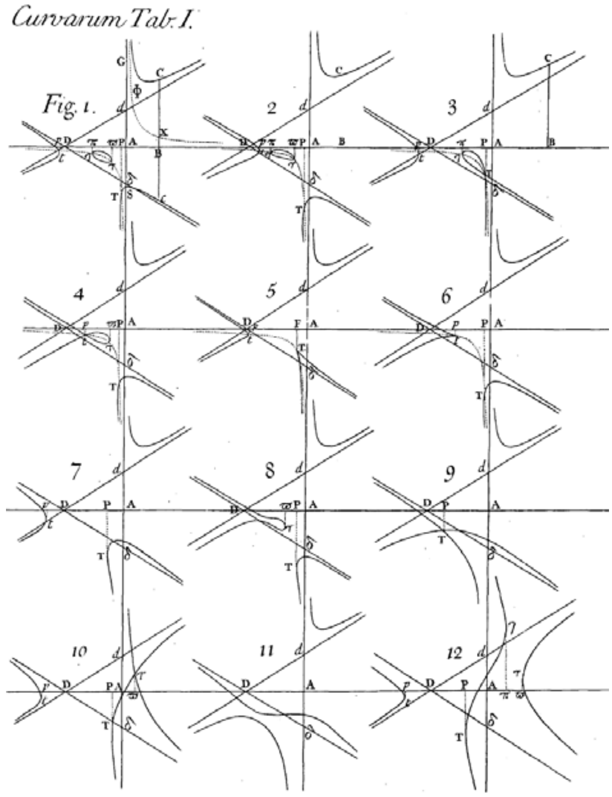


Figura 40

En todas las figuras observamos que, aunque no lo haya hecho explícito, están presentes los dos ejes de coordenadas, siempre ortogonales. Es precisamente la presencia de los dos ejes en toda su extensión (valores negativos incluidos) unida a la intención de asociar curvas con sus ecuaciones mediante coordenadas, abscisas y ordenadas, el hecho que más nos interesa destacar.

Según Boyer (2007, p. 514) "Aquí se usan por primera vez y de manera sistemática los dos ejes de coordenadas, y ya no se discriminan en absoluto las coordenadas negativas". Y añade: "La *Enumeratio* no fue la única contribución de Newton a la geometría analítica, sino que en su *Method of Fluxions*, […], había sugerido ya nada menos que ocho tipos de sistemas de coordenadas. Uno de ellos, […] que ahora se suelen llamar coordenadas bipolares".

Para desarrollar un sistema de coordenadas geométricas que fueran útiles en la resolución de problemas relacionados con la geometría y la física era necesario el reconocimiento del cero como un número, así como la aceptación de las cantidades negativas como números. Newton en la *Enumeratio* inicia este camino que impulsará definitivamente Euler en la sistematización de las coordenadas en la *Introductio* y que Lacroix incorporará a los libros de texto.

1.5. REVOLUCIÓN FRANCESA: INCORPORACIÓN DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA A LOS LIBROS DE TEXTO: LA ÉPOCA DE LACROIX.

Durante el siglo XVIII la *Ilustración* con Voltaire, Rousseau, D'Alambert, Diderot, Condorcet… prepararon ideológicamente la Revolución; de todos ellos solamente Condorcet pudo ver la caída de la Bastilla en 1789, aunque en 1794 fue reconocido como aristócrata y tras su arresto apareció muerto en su celda (presumiblemente se suicidó). En los comienzos de la Revolución, Condorcet cambió las matemáticas (en las que se le reconoce como un pionero de la matemática social, sobre todo por la aplicación de la probabilidad y la estadística a los problemas sociales) por la política y la administración. La Revolución trajo consigo la caída del sistema educativo del Antiguo Régimen, ocasión que Condorcet aprovechó para intentar introducir las reformas educativas que tenía en mente: en 1792, presentó ante la Asamblea Legislativa sus planes de reforma, una educación pública y libre, que no llegaría hasta muchos años después.

Los matemáticos más influyentes durante la Revolución, Monge, Lagrange, Laplace, Legendre, Carnot y Condorcet (todos ellos matemáticos consagrados que gozaban de múltiples publicaciones antes de 1789), no participaron de la misma manera en los cambios políticos. Lagrange, Laplace y Legendre apenas se involucraron políticamente; por el contrario, Monge, Carnot y Condorcet desempeñaron papeles cruciales durante y después de la Revolución, llegando a ocupar cargos importantes (Monge fue nombrado en 1792 ministro de Marina, Condorcet llegó a ser presidente de la Asamblea Legislativa y Carnot, "El Organizador de la Victoria" pasó de la Asamblea Nacional a la Asamblea Legislativa, a la Convención Nacional, Comité de Salud Pública…, hasta hasta que en 1797 fue deportado por no apoyar el golpe militar). Sin embargo, todos ellos participaron en un proyecto común de matemáticas: la integración de las matemáticas dentro de la educación general.

La mayor parte de los matemáticos franceses del siglo XVIII no estaban integrados en las universidades, sino en las escuelas militares, relacionados con la iglesia o bajo el patrocinio real: Lagrange fue profesor en la Academia Militar de Turín y después estuvo bajo el mecenazgo de Federico el Grande de Prusia y de Luis XVI; Condorcet se formó en las escuelas de los jesuitas y después en el Collège de Navarre; Monge pasó de ser alumno de Bézout en la École Militaire de Mézières a profesor de la misma, además sustituiría a Bézout como examinador de la Escuela de Marina; Laplace también se formó en una academia militar; Legendre fue profesor en la École Militaire de Paris; Carnot fue alumno de Monge en la École Militaire de Mézières.

Se puede afirmar que la matemática de esta época en Francia se basaba en la aplicación del análisis a la mecánica y la Revolución agudizó este cariz pues estaba necesitada de una enseñanza técnica. Bajo esta influencia, Monge dedicó sus esfuerzos a la creación de una escuela para ingenieros. En 1794 se constituyó una Comisión de Obras Públicas para diseñar la institución adecuada, L'École Polytechnique, fundada en 1794 y que recibiría sus primeros alumnos en 1975. Monge desempeñó un papel fundamental en la escuela politécnica como administrador y como profesor. Pronto se convirtió en la institución educativa de más prestigio, gracias a su organización, a sus publicaciones (todos los profesores estaban obligados a publicar sus investigaciones) y a la elaboración de los famosos libros elementales de la Revolución (desde la educación primaria hasta la superior que ya tratamos en el capítulo 1, con motivo de la justificación de la elección de las obras de Lacroix por su importancia como autor de este tipo de libros). El éxito L'École Polytechnique pudo estar potenciado porque, según González (1997, p. 99) "los maestros eran los más famosos científicos del momento: Laplace, Lagrange, Monge, etc. […] los científicos politizados veían en la enseñanza la forma de hacer realidad el ideal de una sociedad derivada de la razón, la ciencia y la técnica."

Además de la Escuela Politécnica se crearon otras escuelas y, aunque tuvo una vida muy corta, desde el punto de vista didáctico y de formación del profesorado fue muy importante l'École Normale. L'École Normale se fundó en 1795 (año III de la República) y entre sus profesores de matemáticas elementales destacaron Lagrange, Laplace y Monge.

Durante este período la geometría analítica tendrá un desarrollo casi definitivo por sí misma, de manera que el uso de las coordenadas en el cálculo en esta época la revisaremos de manera somera. Blanco (2004) destaca en este período tres obras: la de Bézout como libro de texto de los alumnos de las escuelas militares del Régimen Antiguo y las de Lagrange y Lacroix como manuales del nuevo sistema educativo. Esas tres obras son las siguientes:

1799-1800 Bézout: *Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie*

1800 Lagrange: *Leçons sur le calcul des fonctions*

1802 Lacroix: *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégrel*

- Bézout

Entre 1764 y 1769 Bézout publica el *Cours de mathématiques à l'usage des Gardes et de la Marine*. En 1768 se hizo cargo de la enseñanza de los alumnos del cuerpo de artillería de Mézières para los que redactó su *Cours de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie* publicado entre 1770 y 1782, curso que también fue utilizado por los candidatos a estudiantes de l'École Polytechnique. Blanco realiza su estudio a partir de una reimpresión entre 1799 y 1800 del *Cours de mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine*.

La claridad y orientación práctica de sus libros, según Blanco (2004, p. 79), hicieron que se tradujeran al inglés y se utilizaran a principios del siglo XX en los EEUU. También fueron la base de los *Elementos de Matemáticas* de Benito Bails.

Bézout utiliza generalmente un lenguaje geométrico y considera la curva como un polígono. Usa generalmente coordenadas ortogonales por simplicidad, aunque afirma que no tienen por qué ser perpendiculares. También señala que se puede considerar una cantidad expresada algebraicamente como la ordenada de una línea curva.

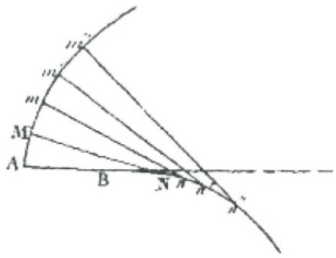


Figura 41

- Lagrange

Lagrange fue el primer profesor de análisis de l'École Polytechnique. Publicó sus lecciones sobre cálculo en dos volúmenes, la *Théorie des fonctions analytiques* en 1797 y *Leçons sur le calcul des fonctions* en 1800[31]. En *Leçons sur le calcul des fonctions* recoge las lecciones impartidas en l'École Normale que luego reimprimiría para los alumnos de l'École Polytechnique.

[31] Se volvería a editar en 1804, 1806 y 1866 en francés; y se tradujeron al inglés en 1806 y al alemán en 1823.

Las *Leçons sur le calcul des fonctions* no solo están escritas con un lenguaje algebraico, sino que además no contiene figuras. El álgebra se puede considerar como la ciencia de las funciones obtenidas mediante su desarrollo en serie. En cuanto a las coordenadas, simplemente expresa que *x* e *y* son las coordenadas de la curva sin especificar de qué tipo son.

- Lacroix

De Lacroix, analiza Blanco las coordenadas en el *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégrel*. De esta obra, Blanco concluye que Lacroix habla del movimiento continuo generador de curvas, sin embargo el lenguaje que utiliza es básicamente algebraico. En cuanto a las coordenadas utilizadas, trabaja generalmente con rectangulares aunque afirma que todo lo que ha escrito se podría generalizar para coordenadas oblicuas. Dado que Lacroix y sus tratados son la parte esencial de esta memoria, más adelante analizaremos con detalle el uso de las coordenadas no solo en sus tratados sobre cálculo, sino también y en especial en su tratado de geometría analítica.

En cuanto a la geometría analítica, durante esta época cabe añadir que el predomino del cálculo sobre la geometría a lo largo del siglo XVIII provocó que ésta no se desarrollara de una manera eficaz y tomara una forma definitiva (prácticamente como la actual excepto en el aspecto vectorial) hasta los matemáticos de la Revolución Francesa, con Monge a la cabeza como especialista en geometría, y sus alumnos, entre ellos Lacroix, que plasmaron las lecciones de Monge[32] en multitud de libros de texto sobre geometría analítica.

Monge es conocido sobre todo por su *Géométrie descriptive,* obra que reúne las lecciones que impartió en l'École Normale, pero su contribución a la geometría analítica también fue esencial e importantísima. Para poder impartir el curso de *Aplicaciones del análisis a la geometría* en l'École Polytechnique, Monge se vio obligado a publicar en 1795 para uso de sus alumnos *Feuilles d'analyse apliquée à la géometrie*. En este libro, según Boyer (2007, p. 599) la geometría analítica tridimensional adoptó la forma definitiva y constituyó el prototipo de los programas actuales. Pero los estudiantes encontraban el curso difícil debido a que los niveles elementales se pasaban muy rápidos. Monge era reacio a escribir libros de texto, y en particular libros de texto de

[32]Lacroix reconocía que la sección de su libro dedicada a la geometría del espacio era casi en su totalidad obra de Monge.

nivel elemental, así como a publicar material que no fuera fundamentalmente suyo. Fueron sus discípulos los encargados de ordenar y publicar la geometría analítica en multitud de libros de texto inspirados en las lecciones de Monge en l'École Polytechnique. Boyer atribuye la paternidad de la "revolución analítica" principalmente a Monge.

Reproduciendo a Boyer (2007, p. 603), "Quizá puedan sentirse satisfechos los profesores de hoy al pensar que la geometría analítica tal como la presentaron Fermat y Descartes, un abogado y un filósofo respectivamente, resultó poco eficaz, y que sólo cuando verdaderos pedagogos le dieron una nueva forma, tal como hicieron Monge y aquellos de sus discípulos que llegaron a ser a su vez profesores de la École Polytechnique, fue cuando mostró su vitalidad y eficacia."

De forma muy resumida, la geometría analítica tal como aparece en la actualidad en los libros de texto (salvo en el uso de vectores) a grandes rasgos ha recorrido diferentes etapas: la geometría clásica griega introduce las coordenadas intrínsecas (Menecmo y Apolonio); posteriormente Pappus consolida la aplicación del método del análisis, más adelante Oresme construye curvas a partir de la longitud y latitud bajo la influencia de las coordenadas geográficas; Viète propicia el inicio de las coordenadas cartesianas al aplicar el álgebra simbólica a los problemas de geometría; con Descartes y Fermat surge el principio de la geometría analítica en sus dos aspectos: la derivación de ecuaciones de los lugares geométricos y el estudio de las propiedades de las curvas dadas por sus ecuaciones; Newton clasifica las líneas de tercer orden, siguiendo la clasificación de las cónicas hecha por Descartes; con Euler llega el trazado de curvas a partir de su expresión analítica (representación gráfica de funciones en el momento en el que el uso de las coordenadas como herramienta útil en el del desarrollo del cálculo había relegado el desarrollo de la geometría analítica como rama independiente a un segundo plano) e inicia el estudio sistemático de rectas, ángulo, paralelismo…, así como la clasificación de curvas y superficies que continuarán Lagrange, Monge, Lacroix…, dando prácticamente la forma definitiva a la geometría analítica estructurada en los diferentes libros de textos.

ANEXO IV

ANEXO IV. TABLAS CRONOLÓGICAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA DE GEORGE GLAESER.

CHRONOLOGIE SOMMAIRE

1. Phase heuristique

EUCLIDE ARCHIMÈDE APPOLONIUS (262–200 av J.C.)	Calcul géométrique sans algèbre — sans coordonnées Sections coniques
ORESME (1361)	*De latitudinibus formarum* Les coordonnées géographiques

Les nombres négatifs ne sont pas encore familiers à cette époque

FERMAT dès 1629	Interprétation de l'*Algèbre* par la géométrie. Etude géométrique de courbes définies algébriquement.
DESCARTES (1637)	La *Géométrie* résout des problèmes géométriques par l'*Algèbre*. Pas de coordonnées institutionnalisées. Les quatre quadrants sont étudiés séparément (exemple : le folium de DESCARTES n'était vu que dans le premier quadrant ; on complétait par symétrie).

CHRONOLOGIE SOMMAIRE (suite)
2. Construction de l'algorithme

EULER (1748)	*"Introductio in Analysim infinitorum"* (Tome 2) Présentation des coordonnées "cartésiennes" (positives ou négatives). Changement de coordonnées. Classification des coniques et des quadriques. Pas d'étude systématique de la droite!
LAGRANGE (1770) De 1768 à 1820, par MONGE (1795), LACROIX et leurs élèves	Élaboration du formulaire La dénomination *"Géométrie Analytique"* LACROIX prétend faire pour la Géométrie ce que LAGRANGE avait réalisé auparavant pour la Mécanique analytique Application automatique de séquences algorithmiques Stock d'alternatives pour exprimer les mêmes questions : usage de déterminants
BIOT (1809)	Premier manuel scolaire de G.A.
G,LAMÉ (1818)	*"Examen des différentes méthodes pour résoudre les problèmes de géométrie"* (ouvrage de réflexion à l'usage des mathématiciens : apparition de techniques nouvelles).
L.CARNOT (1803)	*"La géométrie de position"* Critique des difficultés causées par les nombres négatifs Le mot "*abscisse*" désigne encore une distance
PONCELET (1862) CHASLES	Géométrie orientée : *"Sur la loi des signes de position en Géométrie"* publié en 1862 (recherches de 1815 –1816)
MONGE	Aires et volumes orientés

CHRONOLOGIE SOMMAIRE (suite)
3. EXTENTION DE L'IDÉE DE COORDONNÉE

WESSEL (1799) ARGAND (1806)	Le plan complexe
HAMILTON (1847)	Les quaternions
HAMILTON GRASSMANN (1844)	Le calcul vectoriel
LAMÉ (1818)	Notations abrégées : on parle de la droite d'équation $l = 0$ au lieu de $ax + by + c = 0$.
BOBILLIER (1797 – 1832) PLÜCKER (1801 – 1868)	Coordonnées homogènes et tangentielles
MÖEBIUS (1827)	" *Das barycentrische Kalkül* "
CAYLEY (1843)	Représentation des transformations par des matrices
PLÜCKER (1828)	Coordonnées plückériennes
et	Allusion à des calculs non exécutés
PONCELET	Élimination de la "triple – x": une lettre pour désigner un vecteur, une matrice, une fonction, . . .

CHRONOLOGIE SOMMAIRE (suite)
4. RENOUVEAU HEURISTIQUE

vers une géométrie analytique,
sans axes ni coordonnées

SALMON (1848 à 1862)	Flexibilité dans l'emploi des nouveaux symboles : virtuosité heuristique.
BOULIGAND (1924)	" Géométrie vectorielle "
XX^{e}siècle	Algèbre linéaire

ANEXO V

ANEXO V. TABLA DE COORDENADAS EN EL CÁLCULO DEL SIGLO XVIII BASADA EN LA TESIS DE MÓNICA BLANCO.

Año[1]	Autor	Curvas estudiadas	Coordenadas	Curva = Polígono Función	Lenguaje	Dirigida a	Influencia principal
1691-692	BERNOULLI, Johann 1667 - 1748	Geometría clásica Cicloide Logarítmica	Generalmente ortogonales En la espiral utiliza coordenadas polares	Curva=polígono		Lecciones para clases particulares	
1696	L'HOPITAL, Guillaume François Antoine Marquis de 1661 - 1704	Geometría clásica Cicloide Logarítmica	Según la naturaleza de la curva	Curva=polígono		Tratado erudito	Leibniz
1706	DITTON, Humprhy 1675 - 1715	Espirales Cicloide Logarítmica A partir de su desarrollo en serie estudia la logarítmica, de la que deduce la exponencial	Generalmente ortogonales Ortogonales para las líneas genéricas y la cicloide. Coordenadas desde un punto para las espirales	Curva=polígono	Generalmente geométrico, considera el movimiento continuo y compuesto como generador de las curvas	Tratado erudito, dirigido a los que querían dominar esta nueva materia.	Fluxiones de Newton
1708	REYNEAU, Charles René 1656 - 1728	Algebraicas generales Cicloide Logarítmica Exponencial Trata las curvas algebraicas	Generalmente ortogonales Generalmente ortogonales (pero también para cualquier ángulo) Coordenadas desde	Curva=polígono	Presenta los dos puntos de vista, geométrico y algebraico. Primera parte geométrico.	Tratado Erudito dedicado a los principiantes para que descubran las principales propiedades de todas las curvas, lo escribe con la intención de enseñar las nuevas matemáticas de finales del siglo XVII.	Leibniz

[1] Año de publicación.

		en general y la cicloide de manera similar a como lo habían hecho L'Hôpital y Johann Bernouille. A partir de la curva logarítmica (cuyas diferencias halla a partir de su desarrollo en serie) deduce las diferencias de la curva exponencial	un punto.		En los problemas de forma algebraica		
1713 1715	Wolff, Christian 1679 - 1754	Geometría clásica Cicloide Logarítmica Trata curvas de la geometría clásica, como la concoide, la cisoide, la cuadratriz y la espiral. La cicloide y la logarítmica (que define a partir de la subtangente constante), que empieza a ser usual en el s. XVII	Transcendentes según la naturaleza de la curva. Algebraicas con ortogonales	Curva=polígono	Geométrico	Obras para los estudiantes universitarios.	Leibniz
1742	MACLAURIN, Colin 1698 - 1746	Geometría clásica Algebraicas generales Cicloide Logarítmica Exponencial Trigonométricas Trata curvas algebraicas, en	Generalmente ortogonales En general, y sin hacerlo explícito, utiliza coordenadas ortogonales. En algunos casos también utiliza ordenadas desde un		Geométrico	Tratado erudito Principal motivación de su publicación fue defender el método de fluxiones ante el ataque de Berkeley	Newton

		general. En el primer libro trata el logaritmo, la exponencial, la cicloide, la cisoide, la espiral… de forma geométrica, a partir de sus definiciones, mientras que en el segundo lo hace a partir de series. Define la fluxión de la exponencial a partir de la del logaritmo. También trata la fluxión del coseno (mediante el teorema de Taylor)	punto				
1748	AGNESI, Maria Gaëtana 1718 - 1799	Geometría clásica: espirales, conoide, cuadratriz y cónicas. Cicloide Logarítmica Exponencial La “versiera”	Según la naturaleza de la curva. Elección análoga a L’Hôpital. En el caso de coordenadas ortogonales, comenta que de hecho las ordenadas puede formar cualquier ángulo con las abscisas	Curva=polígono	La primera parte es geométrico	Tratado erudito Dirigida a los principiantes italianos	Leibniz
1748	EULER, Leonhard 1707 - 1783	Algebraicas generales Logarítmica Exponencial Trigonométricas	Generalmente ortogonales	Función		Tratado erudito	
1750	SIMPSON, Thomas	Geometría clásica Cicloide	Según la naturaleza de la curva Ortogonales para las		La primera parte geométrico. Pero aparecen comentarios	Obras para los estudiantes de escuelas militares (academia militar de Woolwich), aunque	Newton

	1710 - 1761	Trigonométricas A partir de las fluxiones de las líneas curvas algebraicas todas las demás son explicables. De las algebraicas trata con cónicas, cisoide y conoide. También trata las trigonométricas, la cicloide, las espirales (logarítmica i de Arquímedes). Ocasionalmente no trabaja con la ecuación de la curva sino con proporciones, a partir de las propiedades (como por ejemplo, en el caso de la espiral de Arquímedes)	algebraicas (cisoide, concoide…). El planteamiento en el caso de la cicloide con el de L'Hôpital, es decir, abscisas tomadas sobre el arco de la circunferencia generadora. Para la espiral escoge el arco y el radi (coordenadas polares).		algebraicos	dedica su obra a principiante	
1755	Euler	Algebraicas generales Logarítmica Exponencial Trigonométricas		Función		Tratado erudito	
1759	LAGRANGE, Giuseppe Luigi (1736 – 1813) (Turín-París)	Geometría clásica Algebraicas generales Solamente trata curvas algebraicas en general y cónicas y concoide en particular	Generalmente ortogonales Aplica cambio de sistemas de coordenadas	Función	Algebraico. Identifica ecuación con curva	Obras para los estudiantes de escuelas militares (Reggie Scuole di Artiglieria de Turín)	Euler
1760	KÄSTNER, Abraham Gotthelf	Espirales Algebraicas generales Trata con algebraicas en general (cónicas en	Según la naturaleza de la curva Transcendentes (cicloide y espiral)	Curva=polígono Función	Algebraico, aunque considera la curva como polígono de	Obras para los estudiantes universitarios	Euler

	1719 - 1800	particular), con la espiral y la cicloide.	según la naturaleza de la curva. Ortogonales para las algebraicas		infinitos lados.		
1770	TEMPELHOFF, George Friedrich von 1737-1807	Algebraicas generales Logarítmica Exponencial Trigonométricas Trata con algebraicas en general, cónicas en particular. La logarítmica (su diferencia a partir de su generación) de la que deduce la exponencial y su diferencia.	Generalmente ortogonales Generalmente ortogonales; las trigonométricas arco como variable independiente	Función	Se puede considerar algebraico, aunque algunas de sus demostraciones son geométricas	Obras para los estudiantes de escuelas militares (Real Artillería Prusiana)	Euler
	Institutiones Analyticae (1765-1767) con Vincenzo Riccati						
1775	SALADINI, Girolamo 1731-1813	Geometría clásica Cicloide Logarítmica Circulares/Hiperbólicas Trata curvas clásicas como las espirales y la concoide. Algebraicas en general Las transcendentes tiene ecuaciones diferenciales de 1º grado.	Generalmente ortogonales Pero también contempla cualquier ángulo entre ordenadas y abscisas. Utiliza coordenadas desde un punto	Curva=polígono	En parte algebraico. La curva es el resultado del movimiento compuesto por la ordenada y la tangente.	Tratado erudito	Leibniz

1786	KARSTEN, Wenceslau J.G. 1732 - 1787	Geometría clásica Cicloide Logarítmica Exponencial Trigonométricas Trata curvas de la geometría clásica como cónicas, la cisoide, la conoide, la cuadratriz y las espirales. La cicloide y la logarítmica de la que deduce la exponencial (mediante desarrollo en serie).	Generalmente ortogonales Cisoide, conoide y cicloide con ortogonales. Cuadratriz y espiral con coordenadas polares que después transforma en ortogonales	Función	Algebraico	Obras para los estudiantes universitarios.	
1799 1800	BÉZOUT, Étienne 1730 - 1783	Algebraicas generales Logarítmica Exponencial Trigonométricas De la logarítmica deduce la exponencial y su diferencia	Generalmente ortogonales	Curva=polígono	Casi siempre geométrico.	Obras para los estudiantes de escuelas militares. Su obra estaba destinada a los oficiales navales y al cuerpo de artillería, pero también fue utilizada por los candidatos a estudiantes de l'École Polytechnique La obra estudiada es una reimpresión del *Cours de mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine* publicada entre 1764 y 1769.	Leibniz Euler (teoría ecuaciones algebraicas)
1800	LAGRANGE, Joseph Louis (1736 – 1813) (Turín-París)	Algebraicas generales Logarítmica Exponencial Trigonométricas	No especifica coordenadas	Función	Algebraico	Obras para los estudiantes universitarios (normale-polytechnique)	Euler

		Trata funciones desarrolladas en series de potencias: algebraicas, seno, coseno, exponencial (de la que deduce la logarítmica).					
1802	LACROIX, Sylvestre Françoise 1765 - 1843	Espirales Algebraicas generales Cicloide Logarítmica Exponencial Trigonométricas Trata funciones algebraicas y transcendentes. Desarrollables en series de potencias: algebraicas, circulares, exponencial (de la que deduce la logarítmica); o vía ecuaciones diferenciales (cicloide, espirales)	Generalmente ortogonales Cambio de ortogonales a polares	Función	Algebraico	Obras para los estudiantes universitarios(polytechnique)	

ANEXO VI

ANEXO VI. CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES EN EL PRIMER VOLUMEN DE LA *INTRODUCTIO*

Euler presenta en el primer volumen de la *Introductio* dos clasificaciones de funciones, la primera según las operaciones que componen la expresión analítica. La segunda, según el número de valores determinados de la función para un valor determinado cualquiera de la cantidad variable.

La primera de ellas comienza dividiendo las funciones en algebraicas y transcendentes, según su expresión esté compuesta por operaciones algebraicas o transcendentes. Según Durán (Euler, 2000) Euler utiliza la división que hizo Leibniz corrigiendo la separación que hizo Descartes en la *Géométrie* entre curvas geométricas y mecánicas. Leibniz les cambió el nombre y llamó algebraicas a las geométricas y trascendentes a las mecánicas.

Clasificación las funciones algebraicas en racionales e irracionales, según la cantidad variable esté envuelta o no en alguna irracionalidad. Las funciones irracionales en explícitas (las que están desarrolladas mediante signos radicales) e implícitas (las generadas por la resolución de ecuaciones). Las racionales las divide a su vez en enteras y fraccionarias según los exponentes de la cantidad variable sean positivos o negativos y según la expresión analítica contenga o no fracciones con la cantidad variable en el denominador.

El siguiente esquema presenta esta primera clasificación con la inclusión de algunos de los ejemplos que utiliza Euler:

<table>
<tr><td rowspan="5">Funciones de z</td><td rowspan="4">Algebraicas</td><td rowspan="2">Racionales</td><td>Enteras</td><td>$a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+\&c$</td></tr>
<tr><td>Fraccionarias</td><td>$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+\&c.}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\zeta z^5+\&c}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Irracionales</td><td>Explícitas</td><td>$a+\sqrt{\ }(aa-zz)$</td></tr>
<tr><td>Implícitas</td><td>$Z^7=azZ^2-bz^5$</td></tr>
<tr><td>Transcendentes</td><td colspan="3">No propone ningún ejemplo concreto de función transcendente salvo la consideración general de las exponenciales y logarítmicas. Pero insiste en que las funciones transcendentes solamente lo serán si las operaciones transcendentes afectan a la cantidad variable. Por tanto les funciones del tipo: $c + z$, cz^2, $4z^c$; donde c es la circunferencia de radio 1 (es decir, c es 2π), así como las potencias de z en las que el exponente es un irracional, como $z^{\sqrt{2}}$, son funciones algebraicas.</td></tr>
</table>

La segunda clasificación, según el número de valores determinados que obtiene la función para cada uno de los valores determinados de *z*, produce dos grandes tipos de funciones: las uniformes (las que obtienen un único valor determinado si se atribuye un valor determinado cualquiera a la cantidad variable *z*) y las multiformes (que presenta varios valores determinados para cualquier valor determinado que substituya en su lugar a la variable *z*). Son uniformes las funciones algebraicas racionales, las irracionales son todas multiformes ya que, según Euler, los signos radicales son ambiguos y envuelven valores dobles. Las funciones multiformes nacen de la resolución de ecuaciones de grado dos (biformes), tres (triformes), cuatro (cuadriformes), etc., cuyos coeficientes a su vez son funciones uniformes de *z*, a las que denota con las letras *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, …

Las funciones trascendentes pueden a su vez ser uniformes y multiformes e incluso infinitiformes como el arco de círculo correspondiente al seno *z*.

Veamos esta clasificación mediante un esquema incluyendo los ejemplos y las formas generales que nos proporciona Euler.

<table>
<tr><td rowspan="7">Función Z de z</td><td>Uniforme</td><td colspan="2">$P, Q, R, S, \ldots$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Multiforme</td><td rowspan="2">Biforme</td><td>$\sqrt{(2z + zz)}$</td></tr>
<tr><td>$Z^2 - PZ + Q = 0$ o $Z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$</td></tr>
<tr><td>Triforme</td><td>$Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$</td></tr>
<tr><td>Cuadriforme</td><td>$Z^4 - PZ^3 + QZ^2 - RZ + S = 0$</td></tr>
<tr><td>Multiforme en general</td><td>$Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} - \&c. = 0$</td></tr>
<tr><td>Infinitiforme</td><td colspan="2">Arco seno z</td></tr>
</table>

En esta clasificación podemos observar que en la forma general de las diferentes funciones multiformes, Euler hace referencia a las relaciones de Cardano-Viète, que relacionan las raíces con los coeficientes de una ecuación.

Además en los artículos que dedica a dicha clasificación no sólo le interesa saber cuántos valores diferentes se obtienen para cada valor determinado de z, sino saber cuántos pueden ser reales y cuántos imaginarios. Pues esto será muy importante a la hora de estudiar la naturaleza de la curva que describe la función.

Termina este bloque alertándonos sobre la posibilidad de confundir algunas funciones multiformes, que sólo presentan un valor real, con funciones uniformes: aunque las funciones como $\sqrt[3]{P}$, $\sqrt[5]{P}$, $\sqrt[7]{P}$, &c presenta un único valor real no se pueden confundir con funciones uniformes. De manera general las funciones del tipo $P^{\frac{m}{n}}$, siendo la fracción $\frac{m}{n}$ irreducible, no se pueden confundir con funciones uniformes cuando n es impar, ni con funciones biformes cuando n es par.

A continuación reproduzco los artículos en los que Euler despliega dichas clasificaciones:

> *6. El criterio principal para distinguir entre funciones queda puesto en el modo de componerse cantidad variable y cantidades constantes.*
>
> Depende así de las operaciones por las que pueden componerse y mezclarse las cantidades entre sí: que son adición y substracción; multiplicación y división; elevación a la potencia y extracción de raíz; junto a la cuales hay que referir también la resolución de ecuaciones. Dejando a un lado estas operaciones que suelen llamarse algebraicas, hay otras trascendentes, tales como las exponenciales o logarítmicas, y un sinnúmero de otras operaciones que proporciona el cálculo integral.
>
> Al mismo tiempo se puede señalar ciertas especies de funciones, como los múltiplos $2z$, $3z$, $\frac{3}{5}z$, az, &c.; o las potencias de z, como z^2, z^3, $z^{\frac{1}{2}}$, z^{-1}, &c; así como éstas son resultado de una única operación, así también a las expresiones generadas por operaciones cualesquiera se les asigna el nombre de funciones.
>
> *7. Divídense las funciones en algebraicas y trascendentes; son aquéllas las compuestas sólo mediante operaciones algebraicas, éstas en cambio las funciones en que están presentes operaciones trascendentes.*

Son por tanto múltiplos y potencias de *z* funciones algebraicas; y toda expresión que se forme mediante operaciones algebraicas de las antes mentadas, tal como $\dfrac{a+bz^n-c\sqrt{}(2z-zz)}{aaz-3bz^3}$. Y aun a menudo ocurre que funciones algebraicas pueden no expresarse en forma explícita, cual es el caso de la función *Z* de *z* si viene definida por una ecuación como $Z^5 = azzZ^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1$. En efecto, aun cuando esta ecuación no admita solución, Z sigue siendo sin embargo igual a una buena cantidad de expresiones compuestas de la variable z y constantes; y por ello *Z* habrá de ser alguna clase de función de *z*. Otra cosa además es de notar en las funciones trascendentes, a saber, que justamente serán tales si la operación trascendente no sólo interviene en la función sino que además afecta a la cantidad variable. En efecto, en tanto las operaciones trascendentes atañan sólo a cantidades constantes, la función ha de contarse sin reservas entre las algebraicas: del mismo modo que , si c denota la circunferencia del círculo cuyo radio sea igual a 1, c será siempre sin excepción cantidad trascendente, aunque las expresiones $c + z$, cz^2, $4z^c$, &c. serán ciertamente funciones algebraicas de *z*. Menguada es en efecto la fuerza de la duda que algunos suscitan, si expresiones del género de z^c pueden contarse o no con pleno derecho entre las funciones algebraicas; sin que falten tampoco quienes han querido llamar trascendentes mejor que algebraicas a las potencias de *z* cuyo exponente sea un número irracional, como $z^{\sqrt{2}}$.

8. Subdivídanse las funciones algebraicas en racionales e irracionales: son de aquéllas si la cantidad variable no está envuelta en ninguna irracionalidad; de éstas, en cambio, cuando afectan a las cantidades variables signo radicales.

En las funciones racionales por tanto no están presentes otras operaciones fuera de adición, substracción, multiplicación, división, y elevación a potencias cuyos exponentes sean números enteros: con lo que $a+z$, $a-z$, az, $\dfrac{aa+zz}{a+z}$, $az^3 - bz^5$, &c., serán funciones racionales de *z*. Mas, por el contrario, expresiones tales como $\sqrt{}\,z$, $a+\sqrt{}(aa-zz)$, $^3\sqrt{}(a-2z+zz)$, $\dfrac{aa-z\sqrt{}(aa+zz)}{a+z}$ serán funciones irracionales de *z*.

En estas es conveniente distinguir entre explícitas e implícitas.

Son explícitas aquéllas que ya vienen desarrolladas mediante signos radicales, de cuyo género se acaban de dar ejemplos. Funciones irracionales son en cambio generadas por la resolución de ecuaciones. Así, *Z* será función irracional implícita de *z* si viene definida mediante una ecuación tal como $Z^7 = azZ^2 - bz^5$; ya que no puede lícitamente presentar valor explícito alguno para *Z*, ni aun dando entrada a signos radicales, por la razón de que el álgebra común no ha ascendido aún a ese grado de perfección.

9. *Subdivídanse a su vez las funciones racionales en enteras y fraccionarias.*

En aquéllas, ni *z* tiene exponentes negativos ni las expresiones contiene fracciones en cuyos denominadores entre la cantidad variable *z*: por ende se entiende ser funciones fraccionarias aquéllas en que se dan denominadores que contienen *z*, o exponentes negativos de *z*. Será pues la fórmula general de las funciones enteras $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 +$&c.; y en efecto, no se puede pensar ninguna función entera de z que no esté contenida en esa expresión. En cuanto a las funciones fraccionarias, por cuanto varias fracciones pueden unirse en una, quedan contenidas en esta fórmula:

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \&c.}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \zeta z^5 + \&c}$$

en la que es de notar que las cantidades constantes *a*, *b*, *c*, *d*, &c., α, β, γ, δ, &c., ya sean afirmativas, o negativas, o enteras o fraccionarias, o racionales o irracionales, o aun trascendentes, no hacen mudar de naturaleza a la función.

10. Por último, hay que retener principalmente la división de las funciones en uniformes y multiformes. Es función uniforme la que obtiene un único valor determinado si se atribuye un valor determinado cualquiera a la cantidad variable *z*. Es función multiforme, por su parte, aquella que presenta varios valores determinados para cualquier valor determinado que substituya en su lugar a la variable *z*. Todas las funciones racionales, enteras o fraccionarias, son por consiguiente funciones uniformes; ya que las expresiones de tal género no ofrecen sino un único valor, cualquiera que sea el valor atribuido a la cantidad variable. Las funciones irracionales en cambio son todas multiformes, a causa de que los signos radicales son ambiguos y envuelven valores dobles. En cuanto a las funciones trascendentes, también se dan entre ellas uniformes y multiformes: y aun no deja de haber también funciones infinitiformes; de tal género es el arco de círculo correspondiente al seno z; se dan en efecto incontables arcos circulares que tiene todos el mismo seno. Denotan en fin las letras *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, &c. particulares funciones uniformes de *z*.”

11. Es una función biforme de z aquélla función que presenta valores dobles para cualquier valor determinado de z.

Tales funciones presentan raíces cuadradas, tal como $\sqrt{(2z + zz)}$: en efecto, cualquiera que sea el valor establecido para *z*, la expresión $\sqrt{(2z + zz)}$ tiene doble significado, afirmativo y negativo. Y en general, *Z* sería función biforme de *z* si, determinada por la ecuación cuadrática $Z^2 - PZ + Q = 0$, fueren *P* y *Q* funciones uniformes de *z*. Ya que sería entonces $Z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$; de donde se hace patente que a cualquier valor determinado de *z* correspondería un doble valor determinado de *Z*. Es de notar aquí que los dos valores de la función *Z* son ambos reales o bien ambos imaginarios. Pero entonces, como se desprende de la naturaleza de la ecuación, la suma de los valores de *Z* será siempre igual a *P*, y su producto, a *Q*.

12. *Es función triforme de z aquélla que presenta tres valores determinados para cualquier valor determinado de z.*

Tales funciones tienen su origen en la resolución de ecuaciones cúbicas. En efecto, si *P*, *Q*, y *R* fueren funciones uniformes, de modo que $Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$, entonces *Z* sería función triforme de *z*; por cuanto se obtendría un triple valor para cualquier valor determinado de *z*. De tales tres valores de *Z* correspondientes a un único valor de *z*, serán todos reales, o bien lo será uno solo, e imaginarios entonces los dos restantes. Además, se sabe que siempre será la suma de esos tres valores igual a *P*; la suma de factores por pares, igual a *Q*, y el producto de los tres, igual a *R*.

13. Es una función cuadriforme de z aquélla que presenta cuatro valores determinados por cada valor de z.

Tales funciones nacen de la resolución de ecuaciones bicuadradas. Pues, en efecto, si *P*, *Q*, *R* y *S* denotan funciones uniformes de *z*, y fuere $Z^4 - PZ^3 + QZ^2 - RZ + S = 0$, entonces *Z* sería función cuadriforme de *z*, por cuanto a un valor cualquiera de *z* le correspondería un cuádruple valor de *Z*. Así pues, de tales cuatro valores serán todos reales, o bien dos reales y dos imaginarios, o imaginarios los cuatro. Además, siempre será la suma de los cuatro valores de *Z* igual a *P*, la suma de factores por pares, igual a *Q*, por tríadas, igual a *R*, y el producto de todos, igual a *S*. De modo similar se dispone el cálculo de las funciones quinqueformes y sucesivas.

14. Será por tanto función multiforme de z, designada por Z, aquélla que por cada valor de z presente tantos valores cuantas unidades contenga el número n si Z viene definida por la ecuación $Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} - \&c. = 0$.

En donde es particularmente de notar que *n* ha de ser un número entero; y para poder juzgar cuán multiforme sea la función *Z* de *z*, debe siempre ser reducida a racionalidad la ecuación por la que *Z* se define; hecho lo cual, el exponente de la máxima potencia de *Z* indicará el buscado número de valores correspondientes a tal valor de *z*. Se ha de tener presente además que las letras *P*, *Q*, *R*, *S*, &c., deben denotar funciones uniformes de *z*; ya que si alguna fuere función multiforme, la función *Z* ofrecería en cambio muchos más valores correspondientes a un único valor de *z* que los indicados por el número de dimensiones de *Z*. Por otro lado, siempre que algunos de los valores sean imaginarios será par el número de los mismos; de donde se entiende que si *n* fuere número impar siempre sería real al menos uno de los valores de *Z*: por el contrario puede ocurrir no ser real absolutamente ningún valor de Z, si el número *n* fuere par.

15. Si Z fuere tal función multiforme de z que nunca presente sino un único valor real, entonces Z semejaría ser función uniforme de z y acaso podría usurpar muchas veces el lugar de función uniforme.

Serán funciones así $\sqrt[3]{P}$, $\sqrt[5]{P}$, $\sqrt[7]{P}$, &c. como funciones que nunca ofrecen sino un único valor real, e imaginarios todos los restantes, con la sola condición de que *P* sea una función uniforme de *z*. Tal es el motivo de que una expresión como $P^{\frac{m}{n}}$ haya podido contarse entre las uniformes cada vez que n fuera número impar, así fuera m par como impar. Pues como n sea en cambio par no tendrá $P^{\frac{m}{n}}$ ningún valor real, o bien dos; por lo que expresiones del tipo $P^{\frac{m}{n}}$, siendo n un número par, podrán ser contadas con igual derecho entre las biformes, si en verdad la fracción $\frac{m}{n}$ no fuere reducible a términos menores.

ANEXO VII

ANEXO VII. MÉTODO CARTESIANO EN EULER. LA ECUACIÓN DE 2º GRADO.

En el capítulo V de *Élémens d'Algebre* explica cómo reducir una ecuación de segundo grado a una forma canónica, en la que apreciamos claramente que a, b y c son cantidades positivas:

$$axx \pm bx \pm c = 0.$$

Euler presenta las siguientes formas canónicas de la ecuación de segundo grado y sus soluciones:

1. Si $axx \pm bx = 0$, se divide por *x*, y se convierte en una ecuación de primer grado:

$$ax \pm b = 0$$

2. Ecuación de 2º grado *Pura*.

   Si $axx \pm c = 0$ o $axx = \mp c$, se divide por *a*, y se tendrá

$$xx = \frac{c}{a}$$

   y al extraer la raíz cuadrada:

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

3. Ecuación de 2º grado *completa*

   Distingue tres casos en la ecuación de segundo grado completa.

   3.1. Si p es un número par y la ecuación $xx = 2px + q$, se tendrá

$$x = p \pm \sqrt{pp + q}$$

   3.2. Si p es un número impar y la ecuación $xx = px + q$, se tendrá:

$$x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q} = \frac{1}{2}p \pm \frac{\sqrt{pp+4q}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{pp+4q}}{2}$$

   3.3. Si p es una fracción y la ecuación $axx = bx + c$ o $xx = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$, se tendrá:

$$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a}} = \frac{b \pm \sqrt{bb + 4ac}}{2a}$$

En las que los valores que toman las letras asignadas a las cantidades constantes *p*, *q*, *a*, *b* y *c*, ya no son necesariamente positivos. De hecho cuando en la resolución de problemas utiliza alguna de estas reglas, los valores de las cantidades constantes *p*, *q*, *a*, *b* y *c* son indistintamente positivos o negativos.

Veámoslo en el siguiente ejemplo:

1) Enunciado:

   Problema 646, p. 536

   > *Premiere queſtion.* J'ai deux nombres; l'un ſurpaſſe l'autre de 6, & leur produit eſt 91. Quels ſont ces nombres?

   Tengo dos números, uno excede al otro de 6, y su producto es 91. ¿Cuáles son estos números?

   SOLUCIÓN:

   > Si le plus petit eſt x, l'autre eſt $x+6$, & leur produit $91=xx+6x$.
   > Souſtrayant $6x$, il reſte $xx=91-6x$, & la regle donne $x=-3\pm\sqrt{9+91}=-3\pm10$; ainſi $x=7$, & $x=-13$.
   > *Rép.* La queſtion admet deux ſolutions:
   > Suivant l'une, le plus petit nombre x eſt $=7$, & le plus grand $x+6=13$.
   > Suivant l'autre, le plus petit nombre x $=-13$, & le plus grand $x+6=-7$.

2) Elección de las cantidades: Si el más pequeño es x,

3) Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas:

   El otro es x + 6,

   Y su producto 91

4) Reducción de las expresiones: xx + 6x

5) Construcción de la ecuación: 91 = xx + 6x

6) Reducción a una forma canónica:

   Sustrayendo 6x, queda xx = 91 – 6x,

7) Aplicación de la regla algorítmica:

   la regla da x = –3 ± = –3 ±10; así x = 7, y x = –13

8) Enunciado del resultado:

   Respuesta. La cuestión admite dos soluciones:

   Según una, el número más pequeño x es = 7, y el más grande x +6 = 13

   Según la otra, el número más pequeño x = – 13, y el más grande x + 6 = – 7.

Esta manera de tratar las distintas formas canónicas de la ecuación de segundo grado ya la encontramos en la *Introductio*. En el primer tomo Z es una función biforme si está determinada por una ecuación cuadrática expresada de la forma:

$$Z^2 - PZ + Q = 0;$$

y entonces

$$Z = \tfrac{1}{2}P \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}P^2 - Q)}$$

En cambio en el segundo una función biforme, y, adopta la siguiente forma:

$$yy = 2Py - Q$$

o

$$y = P \pm \sqrt{(PP - Q)}.$$

Donde además del cambio del nombre a la variable ha cambiado la forma general de la ecuación cuadrática y en consecuencia la manera de expresar sus valores, facilitando de esta forma la clasificación de los mismos según los valores de P y de Q:

- Si $PP > Q$ los dos valores de y son reales
- Si $PP < Q$ los dos valores de y son imaginarios
- Pero como $PP > Q$ para devenir $< Q$ tiene que pasar por el caso $PP = Q$ entonces $y = P \pm 0$ y los dos valores son iguales.

Lo que nos conduce a concluir que P y Q, aunque en este contexto representan funciones uniformes, simbolizan cantidades positivas.

ANEXO VIII

ANEXO VIII. ECUACIÓN DE 2º GRADO EN LACROIX.

Lacroix distingue en *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'application de l'Algèbre a la Géométrie* cuatro tipos distintos de ecuaciones de segundo grado completas, anteponiendo el signo – cuando quiere que una cantidad se lea como negativa. Además, como las ecuaciones están sujetas a su construcción geométrica, en esta clasificación el término independiente se expresa en forma de potencia cuadrada.

1. $x^2 - ax = b^2$
2. $x^2 - ax = -b^2$
3. $x^2 + ax = b^2$
4. $x^2 + ax = -b^2$

Veamos cómo construye las soluciones las soluciones de las cuatro formas canónicas:

Tipo 1. Las soluciones de la ecuación $x^2 - ax = b^2$ son

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$

luego solo se trata de construir el radical $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, y tomar después la suma y la resta del resultado, con la línea $\frac{1}{2}a$ para obtener el *valor absoluto* de cada una de las raíces propuestas. La construcción geométrica de estas soluciones la hace a raíz de la correspondiente al tipo 3.

Tipo 3. La ecuación $x^2 + ax = b^2$ puesta bajo la forma $x(x + a) = b^2$ se refiere a la propiedad de las secantes y tangentes. Se construye (figura 28) un círculo de radio $BC = \frac{1}{2}a$, se tira una tangente *AB* de longitud *b* y por los puntos *A* y *C* una secante *AC*, llamando *x* a la línea *AD*, se tiene *AD' = AD + DD' = AD + 2 BC = x + a* y por la propiedad de las secantes y tangentes dará *AD* x *AD'* = $\overline{AB}^2$ que es la ecuación propuesta $x(x + a) = b^2$.

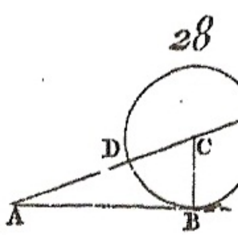


Figura 1

Las soluciones de la ecuación del tipo 1,$x^2 - ax = b^2$, se obtienen al tomar en esta misma construcción x = *AD'*, de manera que la expresión *AD'* = *AD* + *DD'* = *AD* + *2 BC* se convierte *AD* = $x - a$ y $x(x-a) = b^2$. Y, dado que esta construcción no está sujeta a ninguna excepción, mientras b^2 sea positivo en el segundo miembro y x^2 en el primero, las raíces de estas ecuaciones siempre serán reales.

No aparece en el texto la expresión algebraica de las raíces del tipo 3, aunque a partir de su exposición se sobreentiende que serán de la forma:

$$x = -\frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$

Tipo 2. Si la ecuación tiene la forma $x^2 - ax = -b^2$, las soluciones

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

se construyen de manera similar al tipo 1, solo que ahora el radical estaría expresado por uno de los catetos, en vez de estarlo por la hipotenusa, y en el caso de que $\frac{1}{2}a < b$ el triángulo no existiría, pues tal como aparece en la figura 2, tomando sobre uno de los lados de un ángulo recto ABC, una magnitud *AB* = *b*, el círculo *DE* con centro en *A* con un radio menor que *AB*, no alcanzaría a cortar al otro lado *BC*. Lo cual está de acorde con que estas raíces son imaginarias.

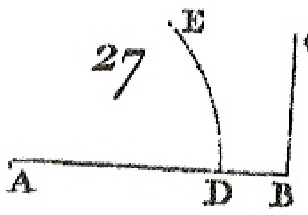


Figura 2

Tipo 4. Las raíces de la ecuación $x^2 + ax = -b^2$ difieren de las de la ecuación $x^2 - ax = -b^2$ en que se hallan afectadas del signo −, pero su magnitud se obtendrá siempre por la construcción que se acaba de exponer. Es decir, las raíces serán:

$$x = -\frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$$

ANEXO IX

ANEXO IX. CANTIDADES NEGATIVAS EN LOS ELEMENTOS DE ÁLGEBRA DE LACROIX.

En la primera descripción de la terminología que se usa para las ecuaciones (términos, miembros, etc.), incluye una nota a pie de página en la que explica claramente que la introducción de la idea de "positivo" y "negativo" no la va a hacer al comienzo del álgebra, porque los signos + y – originalmente, "en su primera institución", indican las operaciones de adición y substracción. Como indican las operaciones y no una característica de los números o un tipo de números (o una "afección" de los números), los signos no están asociados a los números o letras que están escritos después de ellos. En consecuencia, un número que está detrás de un signo + es un número que se está sumando a otro, y un número que está detrás de un signo – es un número que se está restando de otro. El uno es un número "aditivo" y el otro "substractivo". Subyace aquí además la idea de que los dos términos de una adición no son semánticamente intercambiables: el primero es la cantidad inicial y el segundo es la cantidad que se añade. En la substracción, por supuesto que se da esta situación, pero también en la adición.

> Los términos que á su izquierda no tengan signo alguno de adición ó sustracción, ó que tengan el signo +, se llamarán *aditivos*, y los que tengan á su izquierda el signo –, *sustractivos*[1].
>
> [1]No hacemos por ahora uso de las denominaciones de *positivos* y *negativos*, porque los signos + y – en su primera institución no indicaron otra cosa que las dos operaciones *adición* y *sustracción*; y de consiguiente los términos á los cuales esten antepuestos no fueron considerados sino como *sumandos* y *sustraendos*. Mas adelante veremos cómo vinieron los mismos signos á tener una nueva representación conservando siempre la primitiva. (Lacroix, 1821, p. 26)

En la resolución de un problema en el que se representan dos cantidades que suman 12 por x y $12 - x$, tiene luego que representar sus productos por 5 y por 3, respectivamente, y lo hace insistiendo en que el producto está representado, no efectuado:

> […] multiplicaremos 5 por x, y el producto estará representado por $5x$; multiplicaremos igualmente $12 - x$ por 3, y el producto estará bien representado por la combinación $36 - 3x$. Después de haber ejecutado las dos multiplicaciones, ó mas bien después de haber representado los dos productos […] (Lacroix, 1821, pp. 43-44)

Luego tiene que restar 36 – 3*x* de 5*x*, y escribe, con afán pedagógico, en forma de pregunta:

> Pero, ¿cómo podremos restar de 5*x* la cantidad representada por la combinación 36 – 3*x* sin haber quitado antes 3*x* de 36, según lo está indicando lo última expresión” (Lacroix, 1821, p. 44)

A lo que contesta:

> Para superar esta dificultad tengamos presente que si en dos sustracciones hay un mismo minuendo y distintos sustraendos, cuanto tenga uno de estos mas que el otro, tanto cabalmente tendrá menos que el residuo correspondiente al menor sustraendo el correspondiente al mayor (Lacroix, 1821, p. 44).

En la descripción de la adición y substracción de polinomios:

> Si alguno de los polinomios que se hayan de sumar fuese resultado de alguna sustracción anterior, ó lo que es lo mismo, si fuese sustractivo alguno de los términos de los sumandos, deberá serlo igualmente en el resultado, y aparecer en la suma con el mismo signo – con que antes se hallaba. (Lacroix, 1821, p. 52)

Un poco después enuncia una “regla para la reducción de los términos semejantes”:

> Regla general: Si todos los términos semejantes fueren aditivos, la combinación de todos ellos equivaldrá a un solo término aditivo […]
>
> Si todos fuesen sustractivos, la combinación de todos ellos equivaldrá a un solo término aditivo ó monomio sustractivo […]
>
> Si de los términos semejantes unos fuesen aditivos y otros sustractivos, se reducirán los primeros al monomio aditivo equivalente, é igualmente los segundos al equivalente monomio sustractivo […] (Lacroix, 1821, pp. 53-54)

Luego considera el caso en que los coeficientes de los dos monomios sean iguales, en el que

> […] desaparecerá enteramente del resultado la combinación de aquellos términos semejantes, como que se reducen á cero, ó se destruyen mutuamente; (Lacroix, 1821, p. 54).

El caso en que no sean iguales se resuelve restando el menor coeficiente del mayor, y el resultado

> […] tendrá el mismo signo que la mayor de las dos sumas. (Lacroix, 1821, p. 54).

La idea de que los términos substractivos están siempre referidos a algún término aditivo aparece también en el comentario que Lacroix hace en la página 55 en el que dice que aunque los términos de un polinomio se pueden escribir en el orden que se quiera, lo mejor es empezar por un término aditivo "por parecer muy impropio comenzar restando sin suponer de qué":

> En la colocación de los términos de un polinomio se puede guardar el orden que se quiera ó que mas acomode; pero por lo comun ocupa el primer lugar, comenzando por la izquierda, un término aditivo, sea el que fuere, por parecer muy impropio comenzar restando sin suponer de qué. (Lacroix, 1821, p. 55)

En la página 71, enuncia una "regla general" para la multiplicación de términos aditivos y sustractivos:

> *1º Todo término aditivo multiplicado por otro término aditivo da un producto aditivo.*
>
> *2º Todo término sustractivo multiplicado por un término aditivo da un producto sustractivo.*
>
> *3º Todo término aditivo multiplicado por un término sustractivo da un producto sustractivo.*
>
> *4º Todo término sustractivo multiplicado por otro término sustractivo da un producto aditivo.*
>
> Esto mismo se puede expresar mas brevemente diciendo que *si los dos factores parciales tuvieren un mismo signo, el producto parcial procedente de ellos será aditivo, ó tendrá el signo +; pero si los dos factores parciales tuvieren diferentes signos, el producto parcial será sustractivo, y por consiguiente tendrá el signo –.* (Lacroix, 1821, p. 71)

La "expresión más breve" trata de los signos, enuncia de hecho la regla de los signos, y parece como si Lacroix considerara que así expresada es una pura regla formal que el lector puede encontrar carente de significado. La regla general expresada de forma más extensa, por el contrario, sí que tiene significado, y probablemente por eso la presenta primero, con el fin de dotar de significado a la regla de los signos.

Lacroix continúa en la página siguiente (p. 72), recapitulando todas las reglas "que es necesario observar en esta operación", es decir, en la multiplicación de polinomios. En la recapitulación habla más explícitamente de “la regla de los signos”:

> 1º *Se determinará el signo que se ha de anteponer a cada término del producto total* […] Esta se llama la regla de los signos. (Lacroix, 1821, p. 72)

Las otras tres reglas las llama “regla de los coeficientes”, “regla de las letras” y “regla de los exponentes”, y se refieren a cómo se calculan los coeficientes y los exponentes de cada término del producto, y cuáles son las letras que aparecen en cada término.

En ninguna de las ocasiones que hemos examinado hasta aquí hay un término aislado que lleve el signo menos. Lacroix aborda esa situación en la discusión de la resolución de un problema de enunciado verbal, en el que aparece en el curso de la resolución

y = (138 – 180)/7 = –42/7 [En el original, las fracciones no están escritas en una línea, y, por tanto, el numerador de la primera no está entre paréntesis. El signo menos de la segunda no está escrito a la altura de la raya de fracción, sino en el numerador, no afecta, por tanto, a la fracción 42/7, sino a su numerador 42.]

Lo primero que hace Lacroix es preguntarse qué puede querer decir esa expresión:

> […] pero siendo absolutamente impracticable la sustraccion, ¿qué querrá decirnos aquella fórmula ó esta otra, á la cual viene á reducirse $y = \frac{-42}{7}$? (Lacroix, 1821, pp.124-125)

Para contestar a esa pregunta, recuerda que ya le ha dado significado a una expresión substractiva cuando está combinada con una aditiva que es mayor que ella, y se pregunta por la situación contraria, y, más aún, la situación en la que ha desaparecido en la expresión todo rastro de la cantidad de la que la substractiva se está substrayendo, porque ésta aparece sola:

> Ya sabemos lo que significa una combinación de dos cantidades, en la cual la que tiene antepuesto el signo – es menor que la otra; pero cuando la cantidad substractiva es mayor que la otra, y sobre todo cuando está enteramente sola, ¿qué podrá esto significar? (Lacroix, 1821, p. 125)

Lacroix propone volver al enunciado del problema verbal para buscar en la historia que describe la forma de dar significado a una expresión que carece de todo significado aritmético. Más exactamente, lo que propone es volver a las ecuaciones que ha obtenido como traducción del enunciado verbal, que son, según Lacroix, una “verdadera” traducción (el calificativo “verdadera” probablemente indica que el original y su traducción tienen el mismo significado –lo que sabemos que es una simplificación excesiva, pero eso es otra historia):

> El mejor medio de aclarar esta duda será retroceder á las ecuaciones primitivas que la han originado; pues siendo estas una verdadera traduccion de la propuesta, será más fácil descubrir en ellas las circunstancias de la cuestion que han ocasionado la dificultad de que tratamos. (Lacroix, 1821, p. 125)

Lo que hace Lacroix es ver que las condiciones del problema implican un absurdo, en este caso que una parte es mayor que el todo

> […] y siendo esto un absurdo, es claro que la propuesta contiene condiciones incompatibles, (Lacroix, 1821, p. 125)

y

> […] de consiguiente podemos estar ciertos de que la cuestión es absurda, y su solución enteramente imposible. (Lacroix, 1821, p. 125)

A continuación, Lacroix plantea que aunque con esta observación ya se podría dar uno por satisfecho, también se puede "profundizar más" y ver cómo se puede cambiar el enunciado para que ya no sea absurdo y tenga solución, es decir, resulte un número positivo. El cambio en el enunciado mantiene "los números dados", pero modifica la condición del problema, de tal manera que el resultado sea "el mismo número que antes hemos hallado". Lacroix dice "el mismo número", cuando se está refiriendo al número sin el signo menos afectándolo. El signo no forma parte pues del número, sino que lo afecta, lo convierte en aditivo o substractivo.

Y concluye la discusión basando en esa idea de cantidad substractiva, que significa que hay algún absurdo o incompatibilidad en el problema, lo que se llama "solución negativa". Lo substractivo es lo que puede dar significado, mediando los significados de la historia del problema, a lo negativo, que estrictamente carece de significado aritmético (y algebraico).

> Siempre que á causa de haber alguna incompatibilidad en las condiciones del problema, resulta sustractivo el valor de alguna incógnita, se dice que la solucion es *negativa*. (Lacroix, 1821, p. 129)

Lacroix da un paso más hacia el significado algebraico de lo negativo en el párrafo siguiente, refiriéndose directamente a que "no se contentaron los algebristas" con lo que ha expuesto antes, es decir, con la consideración de que los enunciados de los problemas que dan origen a soluciones negativas contienen absurdos o incompatibilidades que se pueden rectificar y obtener problemas similares con los mismos datos e incógnitas, pero con una condición distinta que hace que el valor de la incógnita sea el mismo número, pero positivo. El paso más que presenta en el párrafo 61 es el de la comprobación formal de que la solución negativa verifica la operación planteada, y, en ese sentido, es realmente una solución de la ecuación, aunque no tenga sentido como respuesta al problema enunciado. Obsérvese que, cuando dice esto, Lacroix califica a la solución negativa de "símbolo de una cantidad", subrayando con el término "símbolo" el carácter formal de las operaciones que se hacen con él.

> Si de un problema bien puesto en ecuación se deduce que una incógnita debe ser = –6, por ejemplo, es consiguiente que si mirando como un símbolo de una cantidad á la combinación –6 del guarismo y del signo que le antecede, la sometemos á todas las operaciones indicadas en la cuestion, el resultado deba satisfacer á esta segun esté propuesta, y sin necesidad de variar previamente ninguna de sus condiciones. (Lacroix, 1821, p. 130)

Unas páginas más allá, Lacroix concluye esta historia diciendo:

> Luego que se observó que la aplicación de las reglas de los signos á estas expresiones absurdas procedentes de cuestiones imposibles producia resultados verdaderos, fueron miradas aquellas expresiones como una cierta especie de verdaderas cantidades; se las designó con el nombre de *cantidades negativas*; se las sometió á todas las operaciones del cálculo; y se dijo que si las soluciones negativas indicaban un error en la propuesta de la cuestion, el Algebra lo corregia. (Lacroix, 1821, p. 133)

Lacroix explica también una manera de dar significado a que los algebristas digan que las cantidades negativas son menores que cero, expresión que de entrada puede resultar absurda, pero que

> […] para dejar de ser absurda, debe entenderse en el sentido que acabamos de darla. (Lacroix, 1821, p. 135).

Lo que explica Lacroix es que cualquier cantidad negativa proviene

> […] de sustracciones, en las cuales el sustraendo es mayor que el minuendo; (Lacroix, 1821,p. 134).

Esas substracciones no pueden realizarse: por ejemplo, 3–5, "es verdaderamente imposible", ya que "es equivalente a 3–3–2", dice Lacroix, mostrando con esta expresión equivalente que al 3 se le podrían quitar 3, y aún habría que quitar 2, cuando ya no queda nada. Lacroix propone entender "el símbolo –2", que se da como resultado de esa substracción no como

> […] el residuo, pues en el caso propuesto es un absurdo suponer que pueda haberlo, (Lacroix, 1821, p. 134)

sino como la indicación de que

> […] es necesario añadir 2 á la combinación 3–5 para que se iguale el minuendo con el sustraendo, y se reduzca á cero toda la combinación" (Lacroix, 1821, pp. 134-135).

Lo que ha explicado con el ejemplo de 3–5 y –2, lo extiende a

> […] cualquiera de esos símbolos algebraicos que se llaman cantidades negativas, -*a*, (Lacroix, 1821, p. 135).

(Obsérvese que, de nuevo, las cantidades negativas son "símbolos", no números.)

El significado de –*a* es

> […] que es necesario añadir la cantidad *a* á la combinacion de cantidades, de la cual provino el símbolo –*a*, para reducir a cero el resultado de toda la combinacion. (Lacroix, 1821, p. 135)

Una vez establecido el significado de las cantidades negativas, Lacroix ya puede mostrar que las reglas de los signos se pueden aplicar a ellas "sin recelo alguno":

> Pasemos ya á hacer ver que las reglas de los signos pueden en todos los casos aplicarse sin recelo alguno á los símbolos algebraicos llamados *cantidades negativas*. (Lacroix, 1821, p. 135)

Las reglas se fundamentan en el hecho de que

> […] las expresiones *a*–*a*; *b*–*b*; *c*–*c* &c. son equivalentes á *cero*, y de consiguiente son otros tanto símbolos del mismo *cero*, (Lacroix, 1821, p. 135).

Eso le permite a Lacroix hacer los cálculos con estas expresiones, en las que hay cantidades substractivas y aditivas, y derivar de ellas las operaciones con las cantidades positivas y negativas, y, de ellas, las reglas de los signos.

Sigue una serie de problemas de móviles en los que aparecen soluciones negativas, que se interpretan. Más aún, también aparecen soluciones indeterminadas del tipo 0/0, etc. Y más adelante también hay cantidades imaginarias.

ANEXO X

ANEXO X. MÉTODO CARTESIANO EN LACROIX.

Lacroix resuelve el siguiente problema para poner de manifiesto cómo interpretar geométricamente los signos de las soluciones de una misma ecuación, en el que queremos analizar cómo utiliza el método cartesiano en el proceso de resolución:

> *Por un punto E, fig. 33, colocado como se quiera respecto de dos rectas AB y AC, perpendiculares entres sí, tirar una recta de modo que la parte D'F' de esta recta, interceptada entre las dos rectas propuestas, sea de una magnitud dada m.*(Lacroix, 1807, p. 104)

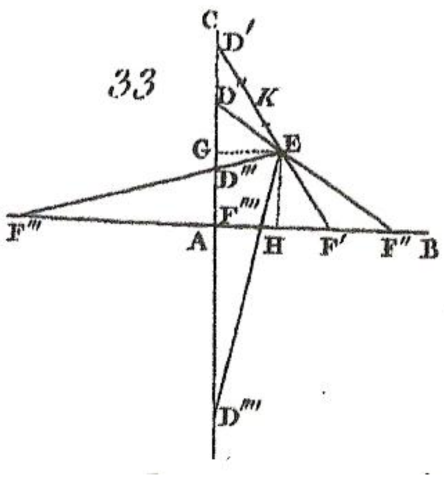


Figura 1

1. Elección de las cantidades.

Siguiendo la notación introducida por Descartes, utiliza las letras del principio del abecedario para indicar las cantidades conocidas pero indeterminadas y las del final para las cantidades desconocidas:

$$GE = a,\ HE = b \text{ y } AD' = y$$

2. Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas.

$$GD' = AD' - AG = AD' - HE = y - b$$

Los triángulos *EGD'* y *F'AD'* son semejantes:

$$GD' : GE :: AD' : AF'$$

luego $$y - b : a :: y : AF'$$

y por tanto

$$AF' = \frac{ay}{y-b}$$

3. Construcción de la ecuación.

Dado que el triángulo *F'AD'* es rectángulo en *A* se cumple:

$$\overline{AD'}^2 + \overline{AF'}^2 = \overline{D'F'}^2$$

sustituyendo los valores se transforma en

$$y^2 + \frac{a^2y^2}{(y-b)^2} = m^2$$

que desarrollando y ordenando queda la siguiente ecuación de cuarto grado

$$y^4 - 2by^3 + (b^2 + a^2 - m^2)y^2 + 2bm^2y - b^2m^2 = 0 \qquad (1)$$

La ecuación es de grado cuatro debido a que la cuestión, tal como se observa en la figura, tiene cuatro soluciones. De las cuales dos, las líneas *F'''D'''* y *F''''D''''*, siempre serán reales, puesto que pueden pasar por el punto *A*, lo cual las haría nulas (*y* = *AD'''* = 0); o pueden ser paralelas, una a *AB* y la otra a *AC*; y por tanto las soluciones ser infinitas (las líneas); por tanto *F'''D'''* y *F''''D''''* pueden tener todos los valores desde cero hasta el infinito (en valor absoluto).

En cambio, las soluciones *F'D'* y *F''D''* pueden ser imposibles, cuando la magnitud *m* sea menor que cierto límite que depende de la posición del punto *E* respecto de las rectas *AB* y *AC*.

4. Reducción a una forma canónica.

El problema se simplifica, sin pérdida de generalidad, si se toma *a* = *b*, es decir si el punto *E* se toma a la misma distancia de las rectas *AC* y *AB*. En cuyo caso la ecuación (1) se transforma en

$$y^4 - 2ay^3 + 2a^2y^2 - m^2(y^2 - 2ay + a^2) = 0 \qquad (2),$$

ecuación que todavía no se resuelve con facilidad.

Pero como en este caso los triángulos *D'AF'* y *D''AF''*, *D''' AF'''* y $D^{IV}AF^{IV}$ son iguales y los ángulos *D'F'A* y *D''F''A*, *D'''F'''A* y $D^{IV}F^{IV}A$ son complementarios, llamando *z* a la tangente del ángulo *D'FA*, se obtiene

$$z = \tan D'F'A = \tan D'EG = \frac{DG'}{GE} = \frac{y-b}{a} = \frac{y-a}{a}$$

y por tanto

$$y = az + a.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (2) y reduciéndola se transforma en

$$a^4z^4 + 2a^4z^3 + (2a^4 - a^2m^2)z^2 + 2a^4z + a^4 = 0$$

y dividiéndola entre a^4 se obtiene

$$z^4 + 2z^3 + \frac{(2a^2 - m^2)}{a^2}z^2 + 2z + 1 = 0 \quad (3).$$

En esta ecuación si la cantidad z' es una solución también lo será $\frac{1}{z'}$, como se demostrará más adelante.

Anota Lacroix que esta ecuación es de las que se llaman *recíprocas* y que se halla en el *Complemento del Álgebra* el modo de disminuir el exponente de estas ecuaciones todo lo posible.

La ecuación (3) se puede escribir del modo

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = \frac{m^2}{a^2}z^2$$

añadiendo z^2 a cada miembro se obtiene

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 + z^2 = \frac{m^2}{a^2}z^2 + z^2$$

escribiendo el primer miembro como un cuadrado perfecto

$$(z^2 + z + 1)^2 = \frac{m^2}{a^2}z^2 + z^2$$

o

$$z^2 + z + 1 = \pm z\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + 1}$$

que a su vez se transforma en

$$z^2 + \frac{a \mp \sqrt{m^2 + a^2}}{a}z + 1 = 0$$

Haciendo $\sqrt{m^2 + a^2} = n$ y separando la ecuación anterior en dos ecuaciones se obtiene

$$z^2 + \frac{a - n}{a}z + 1 = 0$$

$$z^2 + \frac{a + n}{a}z + 1 = 0$$

Si *z'* y *z''* representa las raíces de la primera ecuación y *z'''* y z^{iv} las de la segunda, se tiene

$$z'z'' = 1, \quad z'''z^{iv} = 1$$

Y como *z* expresa la tangente trigonométrica de un ángulo, cuyo radio es 1 se demuestra que los ángulos *z'* y *z''* son complementarios, lo mismo que *z'''* y z^{iv}.

5. Aplicación de la regla algorítmica.

Las soluciones de las ecuaciones anteriores son

$$z = -\frac{a-n}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(a-n)^2 - 4a^2}$$

$$z = -\frac{a+n}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(a+n)^2 - 4a^2}$$

6. Enunciado del resultado.

Pero

$$\sqrt{(a-n)^2 - 4a^2} = \sqrt{(n+a)(n-3a)}$$

$$\sqrt{(a+n)^2 - 4a^2} = \sqrt{(n-a)(n+3a)}$$

y como $\sqrt{m^2 + a^2} = n$ es mayor que *a*, se ve que los dos últimos valores de *z* siempre serán reales, pero los dos primeros serán imaginarios cuando *n* sea menor que 3*a* o lo que es lo mismo $m < 2a\sqrt{a}$. Lo cual prueba que no se podrá tirar en el ángulo *BAC* por el punto *E* ninguna recta de magnitud menor que $2a\sqrt{2}$.

Si *n* = *3a*, entonces $\sqrt{m^2 + a^2} = 3a$ y por tanto $m = 2a\sqrt{2}$. Resulta que los dos primero valores de *z* serán iguales a 1, y los otros dos serán $-2 \pm \sqrt{3}$. Por tanto las líneas *D'F'* y *D''F''* se confunden, haciendo con *AB* un ángulo de 45º.

En el caso general, si se hace

$$\sqrt{(a-n)^2 - 4a^2} = \sqrt{(n+a)(n-3a)} = p$$

$$\sqrt{(a+n)^2 - 4a^2} = \sqrt{(n-a)(n+3a)} = q$$

se obtiene que los cuatro valores de *z* serán

$$z' = -\frac{a-n-p}{2a}$$

$$z'' = -\frac{a-n+p}{2a}$$

$$z''' = -\frac{a+n-q}{2a}$$

$$z^{iv} = -\frac{a+n+q}{2a}$$

Y conociendo los valores de las tangentes *z'*, *z''*, *z'''*, z^{iv} se hallan los valores de *y* por medio de la ecuación $y = az + a$, que se había obtenido anteriormente.

Estos valores serán respectivamente:

$$AD' = -\frac{a-n-p}{2} + a = \frac{a+n+p}{2}$$

$$AD'' = -\frac{a-n+p}{2} + a = \frac{a+n-p}{2}$$

$$AD''' = -\frac{a+n-q}{2} + a = \frac{a-n+q}{2}$$

$$AD^{iv} = -\frac{a+n+q}{2} + a = \frac{a-n-q}{2}$$

Valores que se construyen con facilidad, pues la cantidad *n* es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos lados son *a* y *m*, las líneas *p* y *q* se obtienen también por triángulos rectángulos o por las medias proporcionales; y una vez conocidas las longitudes de las rectas anteriores, los puntos *D', D'', D''',* D^{iv} serán dados.

En el propio texto aparece una nota que indica que esta solución es incompleta si la comparamos con el análisis realizado en el *Algebra* de Bézout; pues solamente indica las soluciones representadas por las líneas *D'F'* y *D'''F'''*.

En el siguiente artículo vuelve a resolver el mismo problema de manera mucho más sencilla. Resolución sacada de la *Aritmética universal* de Newton, en la que es necesario destacar la importancia que tiene en el proceso de resolución la elección de las incógnitas.

En lugar de tomar como incógnita el ángulo comprendido entre la recta buscada y la recta *AB*, Newton elige la distancia entre el punto dado *E* y el punto medio, *K*, de la recta *D'F'*, elección sugerida por el hecho de que la distancia *EK* no puede tener más que dos magnitudes diferentes que proporcionan los cuatro valores buscados, valores que sin tener en cuenta los signos son iguales dos a dos.

Analicemos esta solución paso por paso:

1. Elección de las cantidades.

   K punto medio de la línea *D'F'*

   x = EK

2. Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas.

   $F'K = D'K = \frac{m}{2} = l$

   $D'E = D'K + EK = l + x$

   $F'E = F'K - EK = l - x$

3. Construcción de la ecuación.

Dado que el triángulo *F'HE* es rectángulo, y los triángulos *D'GE* y *EHF'* son semejantes se obtiene

$$F'H = \sqrt{\overline{EF'}^2 - \overline{EH}^2} = \sqrt{(l-x)^2 - a^2}$$

$$D'E : EG :: EF' : F'H$$

lo que es equivalente a

$$l + x : a :: l - x : \sqrt{(l-x)^2 - a^2}$$

Expresión que proporciona la ecuación buscada

$$a(l-x) = (l+x)\sqrt{(l-x)^2 - a^2}$$

4. Reducción a una forma canónica.

Elevando al cuadrado y transponiendo los términos se transforma en

$$x^4 - (2l^2 + 2a^2)x^2 + l^4 - 2a^2l^2 = 0$$

5. Aplicación de la regla algorítmica.

Que resuelta como las de segundo grado, daría

$$x^2 = l^2 + a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^2l^2}$$

6. Enunciado del resultado.

   Y por tanto

$$x = \pm\sqrt{l^2 + a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^2l^2}} = \pm\sqrt{l^2 + a^2 \pm a\sqrt{a^2 + 4l^2}}$$

Que son las cuatro soluciones buscadas, donde podemos observar que en valor absoluto son iguales dos a dos.